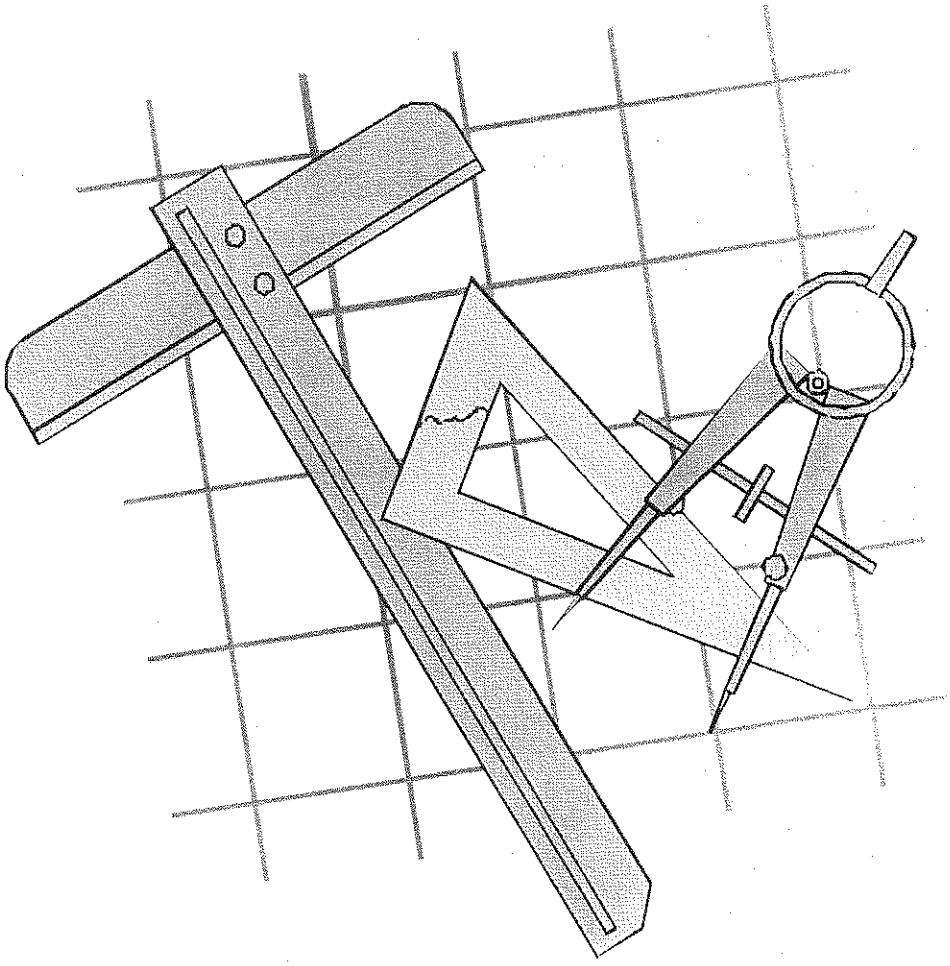


Matemática

Ensino Médio

ÍNDICE DE MATEMÁTICA

Números inteiros 1

Equação do 2º grau 3

Conjuntos numéricos 5

Função do 1º grau 6

Função do 2º grau 7

Matemática financeira 9

Trigonometria no triângulo retângulo 13

Análise combinatória e probabilidade 15

Geometria plena – elementos 18

Polígonos e triângulos 19

Círculo, circunferência e arcos 21

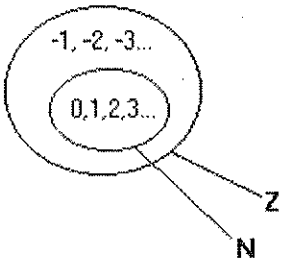
Retas paralelas 24

Números complexos 25

Equação polinominal 29

MATEMÁTICA

NÚMEROS INTEIROS



Interseção do conjunto dos naturais e dos inteiros

Pertencem ao conjunto dos números inteiros **os números negativos, os números positivos** e **o zero**. Fazendo uma comparação entre os números naturais e os inteiros percebemos que o conjunto dos naturais está contido no conjunto dos inteiros.

N = { 0,1,2,3,4,5,6, ... }

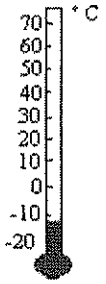
Z = { ... , -3,-2,-1,0,1,2,3,4, ... }

$N \subset Z$

O conjunto dos números inteiros é representado pela letra **Z** maiúscula. Os números positivos são representados com o sinal de (+) positivo na frente ou com sinal nenhum (+2 ou 2), já os números negativos são representados com o sinal de negativo (-) na sua frente (-2).

Os números inteiros são encontrados com frequência em nosso cotidiano, por exemplo:

Exemplo 1:



Um termômetro em certa cidade que marcou 10°C acima de zero durante o dia, à noite e na manhã seguinte o termômetro passou a marcar 3°C abaixo de zero. Qual a relação dessas temperaturas com os números inteiros?

Quando falamos acima de zero, estamos nos referindo aos números positivos e quando falamos dos números abaixo de zero estamos referindo aos números negativos.

+10° C ---------- 10° C acima de zero
- 3° C ---------- 3° C abaixo de zero

Exemplo 2:

Vamos imaginar agora que uma pessoa tem R$500,00 depositados num banco e faça sucessivas retiradas:

• dos R$500,00 retira R$200,00 e fica com R$300,00

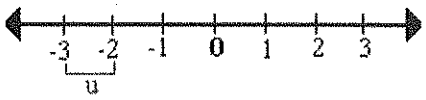
• dos R$300,00 retira R$200,00 e fica com R$100,00

• dos R$100,00 retira R$200,00 e fica devendo R$ 100,00

A última retirada fez com que a pessoa ficasse devendo dinheiro ao banco. Assim:

Dever R$100,00 significa ter R$100,00 menos que zero. Essa dívida pode ser representada por – R$100,00.

Oposto de um número inteiro



- Inteiros não–nulos: São os números inteiros, menos o zero. Na sua representação devemos colocar * ao lado do Z.

Z* = {..., -3, -2, -1, 1, 2, 3,...}

- Inteiros não-positivos: São os números negativos incluindo o zero. Na sua representação deve ser colocado - ao lado do Z.

Z_ = {..., -3, -2, -1, 0}

- Inteiros não-positivos e não–nulos: São os números inteiros do conjunto do Z_ excluindo o zero. Na sua representação devemos colocar o _ e o * ao lado do Z.

Z*_ = {..., -3, -2, -1}

- Inteiros não-negativos: São os números positivos incluindo o zero. Na sua representação devemos colocar o + ao lado do Z.

Z + = { 0,1 ,2 ,3, 4,...}

O Conjunto Z + é igual ao Conjunto dos N

- Inteiros não-negativos e não-nulos: São os números do conjunto Z+, excluindo o zero. Na sua representação devemos colocar o + e o * ao lado do Z.

Z* + = {1, 2, 3, 4,...}

O Conjunto Z* + é igual ao Conjunto N*

Operações em Z

1 – Adição: a + b

A adição de dois números inteiros obedece às seguintes regras:

a) números de mesmo sinal: somam-se os módulos e conserva-se o sinal comum.

Exemplos:

(-3) + (-5) + (-2) = - 10 (-7) + (-6) = - 13

b) números de sinais opostos: subtraem-se os módulos e conserva-se o sinal do maior em módulo.

Exemplos:

(-3) + (+7) = + 4 (-12) + (+5) = -7

Propriedades:

Dados os números inteiros a, b e c, são válidas as seguintes propriedades:

Fechamento: a soma de dois números inteiros é sempre um número inteiro. Diz-se então que o conjunto Z dos números inteiros é fechado em relação à adição.

Associativa: a + (b + c) = (a + b) + c

Comutativa: a + b = b + a

Elemento neutro: a + 0 = 0 + a = a . Zero é o elemento neutro da adição.

Unívoca: o resultado da adição de dois números inteiros é único.

Monotônica: Uma desigualdade não se altera, se somarmos um mesmo número inteiro a ambos os membros, ou seja, se a > b então a + c > b + c.

2 – Subtração: observa-se que a subtração (diferença) é uma operação inversa da adição.

Se a + b = c então dizemos que a = c – b. É óbvio que o conjunto Z é fechado em relação à subtração, pois a subtração (diferença) entre dois números inteiros, sempre será um outro número inteiro. Por exemplo, a operação 3 – 10 não teria resultado no conjunto N dos números naturais, mas possui resultado no conjunto Z dos números inteiros, ou seja -7.

A subtração de dois números inteiros será feita de acordo com a seguinte regra:

a – b = a + (-b)

Exemplos:

10 – (-3) = 10 + (+3) = 13
(-5) – (- 10) = (-5) + (+10) = +5 = 5
(-3) – (+7) = (-3) + (-7) = - 10

3 – Multiplicação: é um caso particular da adição (soma), pois somando-se um número inteiro a si próprio n vezes, obteremos a + a + a + ... + a = a . n = a x n

Na igualdade a . n = b, dizemos que a e n são os fatores e b é o produto.

A multiplicação de números inteiros, dar-se-á segundo a seguinte regra de sinais:

(+) x (+) = +
(+) x (-) = -
(-) x (+) = -
(-) x (-) = +

Propriedades:

Dados os números inteiros a, b e c, são válidas as seguintes propriedades:

Fechamento: a multiplicação de dois números inteiros é sempre outro número inteiro. Dizemos então que o conjunto Z dos números inteiros é fechado em relação à operação de multiplicação.

Associativa: a x (b x c) = (a x b) x c ou a . (b . c) = (a . b) . c
Comutativa: a x b = b x a

Elemento neutro: a x 1 = 1 x a = a. O número 1 é o elemento neutro da multiplicação.

Unívoca: o resultado da multiplicação de dois números inteiros é único.

Uma desigualdade não se altera, se multiplicarmos ambos os membros, por um mesmo número inteiro positivo, ou seja, se a > b então a . c > b . c

Uma desigualdade muda de sentido, se multiplicarmos ambos os membros por um mesmo número inteiro negativo, ou seja: a > b então a . c < b . c

Exemplo: 10 > 5. Se multiplicarmos ambos os membros por (-1) fica - 10 < - 5. Observe que o sentido da desigualdade mudou.

Distributiva: a x (b + c) = (a x b) + (a x c).

A propriedade distributiva acima, nos permite apresentar uma justificativa simples, através de um exemplo, para o fato do produto de dois números negativos resultar positivo, conforme mostraremos a seguir:

Considere o seguinte produto:

A = (7 – 5) x (10 – 6) cujo resultado já sabemos ser 2 x 4 = 8.

Desenvolvendo o primeiro membro, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, vem:

A = (7x10) + [7x(-6)] +[(-5)x10] + [(-5)x(-6)]
A = 70 – 42 – 50 + [(-5)x(-6)]

Como já sabemos que A = 8, substituindo fica:

8 = 70 – 42 – 50 + [(-5)x(-6)]

Isolando o produto [(-5)x(-6)], vem:

[(-5)x(-6)] = 8–70+42+50 = 8+42+50–70 = 100 – 70 = 30

Observa-se então que realmente

[(- 5)x(- 6)] = 30 = + 30.

4 – Potenciação: é um caso particular da multiplicação, onde os fatores são iguais. Assim é que multiplicando-se um número inteiro a por ele mesmo n vezes, obteremos a x a x a x a x ... x a que será indicado pelo símbolo a^n, onde a será denominado base e n expoente. Assim é que, por exemplo, 5^3 = 5.5.5 = 125, 7^1 = 7, 4^3 = 4.4.4 = 64, etc.

Com base nas regras de multiplicação de números inteiros, é fácil concluir que:

a) Toda potência de base negativa e expoente par não-nulo, tem como resultado um número positivo.

Exemplos:

$(-2)^4$ = +16 = 16
$(-3)^2$ = +9 = 9
$(-5)^4$ = +625 = 625
$(-1)^4$ = + 1 = 1

b) Toda potência de base negativa e expoente impar, tem como resultado um número negativo.

Exemplos:

$(-2)^3$ = - 8
$(-5)^3$ = - 125
$(-1)^{13}$ = - 1

5 – Divisão: O conjunto Z dos números inteiros não é fechado em relação à divisão, pois o quociente de dois números inteiros nem sempre é um inteiro.

A divisão de números inteiros, no que concerne à regra de sinais, obedece às mesmas regras vistas para a multiplicação, ou seja:

(+) : (+) = + (+) : (-) = -
(-) : (+) = - (-) : (-) = +

Exemplos:

(–10) : (– 2) = + 5 = 5 (– 30) : (+ 5) = – 6

Para finalizar, vamos mostrar duas regras de eliminação de parêntesis ( ), que poderão ser bastante úteis:

Todo parêntese precedido do sinal + pode ser eliminado, mantendo-se os sinais das parcelas interiores.

Exemplo: + (3 + 5 – 7) = 3 + 5 – 7 = 1

Todo parêntese precedido do sinal – pode ser eliminado, desde que sejam trocados os sinais das parcelas interiores.

Exemplos:

– (3 + 4 – 7) = – 3 – 4 + 7 = 0
– (–10 – 8 + 5 – 6) = 10 + 8 – 5 + 6 = 19
– (–8 – 3 – 5) = 8 + 3 + 5 = 16

Números primos

Números primos são os números naturais que têm apenas dois divisores diferentes: o 1 e ele mesmo. Exemplos:

1) 2 tem apenas os divisores 1 e 2, portanto 2 é um número primo.
2) 17 tem apenas os divisores 1 e 17, portanto 17 é um número primo.
3) 10 tem os divisores 1, 2, 5 e 10, portanto 10 não é um número primo.

Observações:
1 não é um número primo, porque ele tem apenas um divisor que é ele mesmo.
2 é o único número primo que é par.

Os números que têm mais de dois divisores são chamados números compostos.

Exemplo: 15 tem mais de dois divisores. 15 é um número composto.

EXERCÍCIOS

1 – Efetue as seguintes operações:

a) (-5) – (-12) b) (-10) . (18)
c) (-8) + (-16) d) (-4) . (-4)

2 – Os números inteiros **a, b** e **c** (dígitos) participam da seguinte subtração:

$$\begin{array}{rccc} & 7 & a & 2 \\ - & 4 & 8 & b \\ \hline & c & 7 & 3 \end{array}$$

O valor de a + b + c é:

a) 14 b) 15 c) 16 d) 17 e) 18

3 – Dentre os seguintes pares de números inteiros, determine qual apresenta dois números primos entre si.

a) (8, 34) b) (9, 33) c) 15, 755)
d) (14, 77) e) (35, 88)

RESPOSTAS		
1 – a) 7; b) -180; c) -24; d) 16	2 - D	3 - E

EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Denomina-se equação do 2º grau, qualquer sentença matemática que possa ser reduzida à forma $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, onde x é a incógnita e a, b e c são números reais, com $a \neq 0$. a, b e c são coeficientes da equação. Observe que o maior índice da incógnita na equação é igual a dois e é isto que a define como sendo uma equação do segundo grau.

Equação do 2º grau completa e equação do 2º grau incompleta

Da definição acima, temos obrigatoriamente que $a \neq 0$, no entanto podemos ter b = 0 e/ou c = 0.

Caso $b \neq 0$ e $c \neq 0$, temos uma equação do 2º grau completa. A sentença matemática $-2x^2 + 3x - 5 = 0$ é um exemplo de equação do 2º grau completa, pois temos b = 3 e c = -5, que são diferentes de zero.

$-x^2 + 7 = 0$ é um exemplo de equação do 2º grau incompleta, pois b = 0.

Neste outro exemplo, $3x^2 - 4x = 0$ a equação é incompleta, pois c = 0.

Veja este último exemplo de equação do 2º grau incompleta, $8x^2 = 0$, onde tanto b, quanto c são iguais a zero.

O conjunto formado por todas as soluções de uma equação é chamado **conjunto solução.**

Resolução de equações do 2º grau

A resolução de uma equação do segundo grau consiste em obtermos os possíveis valores reais para a incógnita, que torne a sentença matemática uma equação verdadeira. Tais valores são a raiz da equação.

Fórmula Geral de Resolução

Para a resolução de uma equação do segundo grau completa ou incompleta, podemos recorrer à fórmula geral de resolução:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula também é conhecida como **fórmula de Bháskara.**

O valor $b^2 - 4ac$ é conhecido como discriminante da equação e é representado pela letra grega Δ. Temos então que $\Delta = b^2 - 4ac$, o que nos permitir escrever a fórmula geral de resolução como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Resolução de equações do 2º grau incompletas

Para a resolução de equações incompletas, podemos recorrer a certos artifícios. Vejamos:

Para o caso de apenas b = 0, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + 0x + c = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Portanto para equações do tipo $ax^2 + c = 0$, onde b = 0, podemos utilizar a fórmula simplificada $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ para calcularmos as suas raízes. Observe no entanto que a equação só possuirá raízes no conjunto dos números reais se $-\frac{c}{a} \geq 0$

Para o caso de apenas c = 0, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{0}{ax + b} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ ax + b = \frac{0}{x} \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow \end{cases}$$

$$x = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$$

Portanto, para equações do tipo $ax^2 + bx = 0$, onde c = 0, uma das raízes sempre será igual a zero e a outra será dada pela fórmula $x = \frac{-b}{a}$

Para o caso de b = 0 e c = 0, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{0} \Rightarrow x = 0$$

Podemos notar que ao contrário dos dois casos anteriores, neste caso, temos apenas uma única raiz real, que será sempre igual a zero.

Discriminante da equação do 2º grau

O cálculo do valor do discriminante é muito importante, pois através deste valor, podemos determinar o número de raízes de uma equação do segundo grau.

Como visto acima, o discriminante é representado pela letra grega Δ e equivale à expressão $b^2 - 4ac$, isto é: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Discriminante menor que zero

Caso Δ < 0, a equação não tem raízes reais, pois $\nexists \sqrt{\Delta} \in \Re$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \nexists x \in \Re$$

Discriminante igual a zero

Caso Δ = 0, a equação tem duas raízes reais e iguais,pois $+\sqrt{\Delta} = -\sqrt{\Delta}$;

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm 0}{2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + 0}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - 0}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-b}{2a} \end{cases}$$

Discriminante maior que zero

Caso Δ > 0, a equação tem duas raízes reais e diferentes, pois

$+\sqrt{\Delta} \neq -\sqrt{\Delta}$;

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Conjunto Verdade de equações do 2º grau

A partir do estudado acima, podemos esquematizar o conjunto verdade das equações do segundo grau completas e incompletas como a seguir:

Para o caso das equações completas, temos:

$$\begin{cases} V = \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\} \mid \Delta > 0 \\ V = \left\{\frac{-b}{2a}\right\} \mid \Delta = 0 \\ V = \{\} \mid \Delta < 0 \end{cases}$$

Para o caso das equações incompletas onde somente b = 0, temos:

$$\begin{cases} V = \left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\} \mid -\frac{c}{a} \geq 0 \\ V = \{\} \mid -\frac{c}{a} < 0 \end{cases}$$

Para o caso das equações incompletas onde somente c = 0, temos:

$$V = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$$

E no caso das equações incompletas onde tanto b = 0, quanto c = 0, temos:

$$V = \{0\}$$

EXERCÍCIOS

1 – Resolva as equações:

a) $x^2 - 5x - 24 = 0$
b) $x^2 - 6x + 10 = 0$
c) $2x^2 - 7x + 3 = 0$
d) $x^2 - 16x + 64 = 0$

2 – Resolva as seguintes equações:

a) $x^2 - 14x = 0$
b) $x^2 - 196 = 0$

RESPOSTAS
1 – a) {-3,8}; b) Ø; c) $\left\{\frac{3}{2}, 2\right\}$; d) {8}
2 – a) {0, 14}; b) {-14, 14}

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Conjunto é o agrupamento de elementos que possuem características semelhantes.

Subconjunto: se todo elemento de um conjunto A também pertence a um conjunto B, então dizemos que A é subconjunto de B e indicamos isto por A d B. Notas:

a) todo conjunto numérico é subconjunto de si próprio. (A d A)
b) o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto. (id A)
c) se um conjunto A possui m elementos então ele possui 2m subconjuntos.
d) o conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto A é denominado conjunto das partes de A e é indicado por P(A). Assim, se A = {c, d} , o conjunto das partes de A é dado por P(A) = {φ ,{c}, {d}, {c,d}}
e) um subconjunto de A é também denominado parte de A.

Os Conjuntos numéricos especificamente são compostos por números. São eles:

Números Naturais (N)

N = { 0 , 1 , 2 , 3 , ... }

Números Inteiros (Z)

Z = { ... , -2 , -1 , 0 , 1 , 2, ... }

Todo número natural é inteiro, isto é, N é um subconjunto de Z

Números Racionais (Q)

São aqueles que podem ser expressos na forma a/b, onde a e b são inteiros quaisquer, com b diferente de 0.

Q ={x/x = a/b com a e b pertencentes a Z com b diferente de 0 }

Assim como exemplo podemos citar o –1/2 , 1 , 2,5 ,...

- Números decimais exatos são racionais

Pois 0,1 = 1/10

2,3 = 23/10 ...

- Números decimais periódicos são racionais.

0,1111... = 1/9

0,3232 ...= 32/99

2,3333 ...= 21/9

0,2111 ...= 19/90

Toda dízima periódica 0,9999 ... 9 ... é uma outra representação do número 1.

Números Irracionais (I)

São aqueles que não podem ser expressos na forma a/b, com a e b inteiros e b diferente de 0.

São compostos por dízimas infinitas não periódicas.

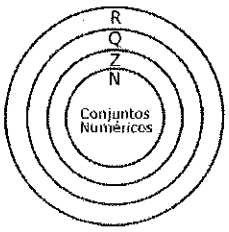
Exemplos:

$$\pi = 3{,}141592654...$$
$$\sqrt{3} = 1{,}73205...$$

Números Reais (R)

É a reunião do conjunto dos números irracionais com o dos racionais.

Resumindo:



$N \subset Z \subset Q \subset R$

Intervalos:

Sendo a e b dois números reais, com a < b, temos os seguintes subconjuntos de R chamados intervalos.

Intervalo fechado nos extremos a e b: $\{x \epsilon R / a \leq x \leq b\}$

Intervalo fechado em a e aberto em b:
$[a,b[= \{x \epsilon R / a \leq x < b\}$

Intervalo aberto em a e fechado em b:
$]a,b] = \{x \epsilon R / a < x \leq b\}$

Intervalo aberto em a e b: $]a,b[= \{x \epsilon R / a < x < b\}$

Temos também:
$[a, +\infty[= \{x \epsilon R / x \geq a\}$
$]-\infty, b] = \{x \epsilon R / b \leq 0\}$

Operações com conjuntos

União (∪)

Dados os conjuntos A e B , define-se o conjunto união A ∪ B = { x; x Î A ou x Î B}.
Exemplo: {0,1,3} ∪ { 3,4,5 } = { 0,1,3,4,5}. Percebe-se facilmente que o conjunto união contempla todos os elementos do conjunto A ou do conjunto B.

Interseção (∩)

Dados os conjuntos A e B , define-se o conjunto interseção A ∩ B = {x; x Î A e x Î B}.
Exemplo: {0,2,4,5} ∩ { 4,6,7} = {4}. Percebe-se facilmente que o conjunto interseção contempla os elementos que são comuns aos conjuntos A e B.

EXERCÍCIOS

Calcule o número de elementos pertencentes a cada um dos seguintes conjuntos:

1) A = {93, 94, 95, ..., 127, 128}
2) B = {x ϵ N | x < 87}
3) C = { x ϵ N* | x < 202}
4) D = { x ϵ N | x ≤ 99}
5) E = { x ϵ N* | x ≤ 144}
6) F = { x ϵ N | 25< x < ≤ 75}
7) G = { x ϵ N | 32 ≤ x < 65}
8) H = { x ϵ N | 78 ≤ x ≤ 181}

RESPOSTAS	
1) 36	2) 87
3) 201	4) 100
5) 144	6) 49
7) 33	8) 104

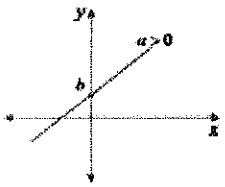
FUNÇÃO DO 1º GRAU

Consideremos x e y duas variáveis, sendo uma dependente da outra, isto é, para cada valor atribuído a x corresponde um valor para y. Definimos essa dependência como função, nesse caso, y está em função de x. O conjunto de valores conferidos a x deve ser chamado de domínio da função e os valores de y são a imagem da função.

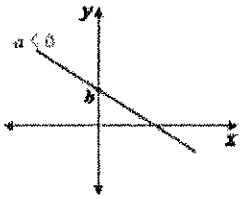
Toda função é definida por uma lei de formação, no caso de uma função do 1º grau, a lei de formação será a seguinte: $y = ax + b$, onde a e b são números reais e $a \neq 0$. Esse tipo de função deve ser dos Reais para os Reais.

A representação gráfica de uma função do 1º grau é uma reta. Analisando a lei de formação $y = ax + b$, notamos a dependência entre x e y, e identificamos dois números: a e b. Eles são os coeficientes da função, o valor de a indica se a função é crescente ou decrescente e o valor de b indica o ponto de intersecção da função com o eixo y no plano cartesiano. Observe:

Função crescente



Função decrescente



Função crescente: à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes em y também aumentam.

Função decrescente: à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y diminuem. Exemplos de funções do 1º grau

$y = 4x + 2$, $a = 4$ e $b = 2$
$y = 5x - 9$, $a = 5$ e $b = -9$
$y = -2x + 10$, $a = -2$ e $b = 10$
$y = 3x$, $a = 3$ e $b = 0$
$y = -6x - 1$, $a = -6$ e $b = -1$

Raiz ou zero de uma função do 1º grau

Para determinar a raiz ou o zero de uma função do 1º grau é preciso considerar $y = 0$. De acordo com o gráfico, no instante em que y assume valor igual a zero, a reta intersecta o eixo x em um determinado ponto, determinando a raiz ou o zero da função.

Vamos determinar a raiz das funções a seguir:

$y = 4x + 2$
$y = 0$
$4x + 2 = 0$
$4x = -2$
$x = -2/4$
$x = -1/2$
A reta representada pela função $y = 4x + 2$ intersecta o eixo x no seguinte valor: $-1/2$

$y = -2x + 10$
$y = 0$
$-2x + 10 = 0$
$-2x = -10\ (-1)$
$2x = 10$
$x = 10/2$
$x = 5$
A reta representada pela função $y = -2x + 10$ intersecta o eixo x no seguinte valor: 5

Sinal

Estudar o sinal de uma qualquer $y = f(x)$ é determinar os valor de x para os quais y é positivo, os valores de x para os quais y é zero e os valores de x para os quais y é negativo.

Consideremos uma função afim $y = f(x) = ax + b$.

Já vimos que essa função se anula para raiz $x = \frac{-b}{a}$.

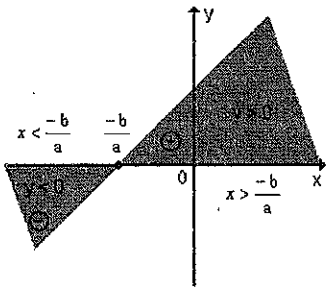
Há dois casos possíveis:

1º) $a > 0$ (a função é crescente)

$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x > \frac{-b}{a}$

$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x < \frac{-b}{a}$

Conclusão: y é positivo para valores de x maiores que a raiz; y é negativo para valores de x menores que a raiz

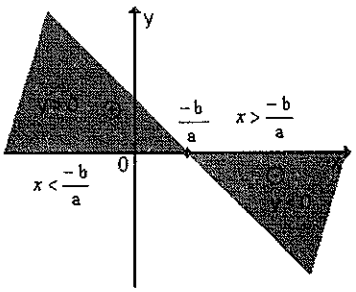


2º) $a < 0$ (a função é decrescente)

$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x < \frac{-b}{a}$

$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x > \frac{-b}{a}$

Conclusão: y é positivo para valores de x menores que a raiz; y é negativo para valores de x maiores que a raiz.



EXERCÍCIOS

1 – Identifique as fórmulas que expressam funções de 1º grau:

a) $y = 3x - 2$
b) $y = -x + 1$
c) $y = 10$
d) $y = \frac{x}{6} + 4$
e) $2x - y^2 = 8$
f) $x - y = 0$

RESPOSTA
1 – A; B; D; F

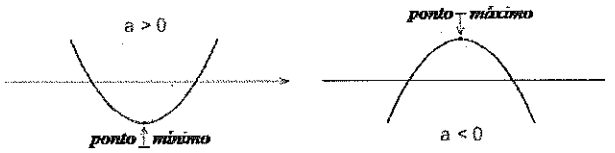
FUNÇÃO DO 2º GRAU

Toda função estabelecida pela lei de formação $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, é denominada função do 2º grau. Generalizando, temos:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

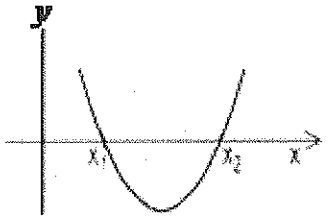
As funções do 2º grau possuem diversas aplicações no cotidiano, principalmente em situações relacionadas à Física envolvendo movimento uniformemente variado, lançamento oblíquo e etc.; na Biologia, estudando o processo de fotossíntese das plantas; na Administração e Contabilidade relacionando as funções custo, receita e lucro; e na Engenharia Civil presente nas diversas construções.

A representação geométrica de uma função do 2º grau é dada por uma parábola, que de acordo com o sinal do coeficiente, pode ter concavidade voltada para cima ou para baixo.



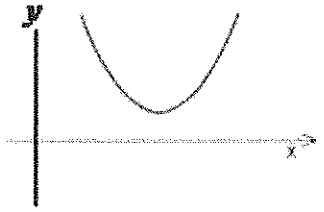
As raízes de uma função do 2º grau são os pontos onde a parábola intercepta o eixo x. Dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, se $f(x) = 0$, obtemos uma equação do 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0$, dependendo do valor do discriminante Δ(delta), podemos ter as seguintes situações gráficas:

$\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais e diferentes. A parábola intercepta o eixo x em dois pontos distintos.



$\Delta = 0$, a equação possui apenas uma raiz real. A parábola intercepta o eixo x em um único ponto.

$\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais. A parábola não intercepta o eixo x.



Sinais da função de 2º grau

Estudar o sinal de uma função, é determinar para quais valores reais de x a função é positiva, negativa ou nula. A melhor maneira de analisar o sinal de uma função é através do gráfico, pois permite-nos uma avaliação mais ampla da situação. Vamos analisar os gráficos das funções a seguir, de acordo com a sua lei de formação.

Observação: para construirmos o gráfico de uma função do 2º grau, precisamos determinar o número de raízes da função, e se a parábola possui concavidade voltada para cima ou para baixo.

$\Delta = 0$, uma raiz real.
$\Delta > 0$, duas raízes reais e distintas
$\Delta < 0$, nenhuma raiz real.

Para determinar o valor de Δ e os valores das raízes, utilize o método de Bhaskara.

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4 * a * c$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Coeficiente a > 0, parábola com a concavidade voltada para cima
Coeficiente a < 0, parábola com a concavidade voltada para baixo

Exemplo 1

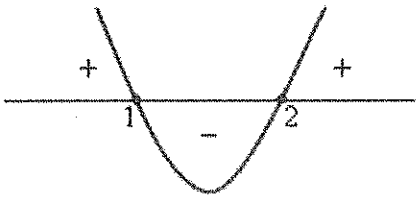
$y = x^2 - 3x + 2$
$x^2 - 3x + 2 = 0$

Aplicando Bhaskara

$\Delta = (-3)^2 - 4 * 1 * 2$
$\Delta = 9 - 8$
$\Delta = 1$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2}$$
$$x' = \frac{4}{2} = 2$$
$$x'' = \frac{2}{2} = 1$$

A parábola possui concavidade voltada para cima em virtude de a > 0 e duas raízes reais e distintas.



Análise do gráfico

x < 1 ou x > 2, y > 0
Valores entre 1 e 2, y < 0
x = 1 e x = 2, y = 0

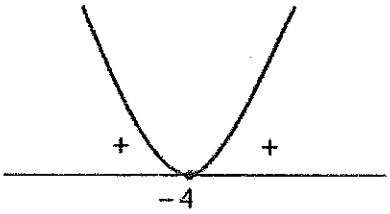
Exemplo 2

$y = x^2 + 8x + 16$
$x^2 + 8x + 16 = 0$

Aplicando Bhaskara
$\Delta = 8^2 - 4 * 1 * 16$
$\Delta = 64 - 64$
$\Delta = 0$

$$x = \frac{-8 \pm 0}{2}$$
$$x = -\frac{8}{2} = -4$$

A parábola possui concavidade voltada para cima, em virtude de a > 0 e uma única raiz real.



Análise do gráfico

$x = -4$, $y = 0$
$x \neq -4$, $y > 0$

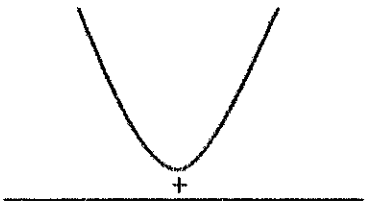
Exemplo 3

$y = 3x^2 - 2x + 1$
$3x^2 - 2x + 1 = 0$

Aplicando Bhaskara

$\Delta = (-2)^2 - 4 * 3 * 1$
$\Delta = 4 - 12$
$\Delta = -8$

A parábola possui concavidade voltada para cima em decorrência de a > 0, mas não possui raízes reais, pois $\Delta < 0$.



Análise do gráfico

A função será positiva para qualquer valor real de x.

Exemplo 4

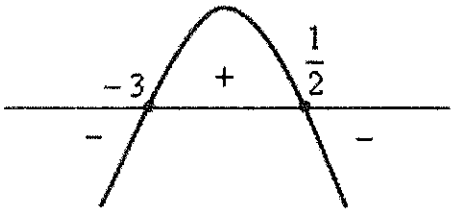
$y = -2x^2 - 5x + 3$
$-2x^2 - 5x + 3 = 0$

Aplicando Bhaskara

$\Delta = (-5)^2 - 4 * (-2) * 3$
$\Delta = 25 + 24$
$\Delta = 49$

$$x = \frac{5 \pm 7}{-4}$$
$$x' = \frac{5+7}{-4} = -3$$
$$x'' = \frac{5-7}{-4} = \frac{1}{2}$$

A parábola possui concavidade voltada para baixo em face de a< 0 e duas raízes reais e distintas.



Análise do gráfico

$x < -3$ ou $x > 1/2$, $y < 0$
Valores entre – 3 e 1/2, $y > 0$
$x = -3$ e $x = 1/2$, $y = 0$

Exemplo 5

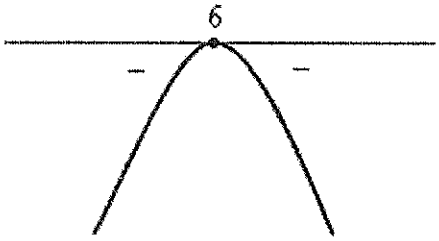
$y = -x^2 + 12x - 36$
$-x^2 + 12x - 36 = 0$

Aplicando Bhaskara

$\Delta = 12^2 - 4 * (-1) * (-36)$
$\Delta = 144 - 144$
$\Delta = 0$

$$x = \frac{-12 \pm 0}{-2} = 6$$

A parábola possui concavidade voltada para baixo em decorrência de a < 0 e uma única raiz real.



Análise do gráfico

$x = 6$, $y = 0$
$x \neq 6$, $y < 0$

Raízes da função de 2º grau

Determinar a raiz de uma função é calcular os valores de x que satisfazem a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, que podem ser encontradas através do Teorema de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Número de raízes reais da função do 2º grau

Dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, existirão três casos a serem considerados para a obtenção do número de raízes. Isso dependerá do valor do discriminante Δ.

1º caso → $\Delta > 0$: A função possui duas raízes reais e distintas, isto é, diferentes.

2º caso → $\Delta = 0$: A função possui raízes reais e iguais. Nesse caso, dizemos que a função possui uma única raiz.

3º caso → $\Delta < 0$: A função não possui raízes reais.

Soma e produto das raízes

Seja a equação, $ax^2 + bx + c = 0$, temos que:

Se $\Delta \geq 0$, a soma das raízes dessa equação é dada por $-\frac{b}{a}$ e o produto das raízes por $\frac{c}{a}$.

De fato, x' e x'' são as raízes da equação, por isso temos:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Soma das raízes

$$x'+x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x'+x''=\frac{-b-b}{2a}$$

$$x'+x''=\frac{-2b}{2a}$$

$$x'+x''=-\frac{b}{a}$$

Produto das raízes

$$x'*x''=\frac{(-b+\sqrt{\Delta})}{2a}*\frac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a}$$

Efetuando a multiplicação, temos:

$$x'*x''=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}$$

Substituindo Δ por $b^2 - 4ac$, temos:

$$x'*x''=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$x'*x''=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$

$$x'*x''=\frac{4ac}{4a^2}$$

Após a simplificação, temos:

$$x'*x''=\frac{c}{a}$$

EXERCÍCIOS

1 – Considere a função definida por $y = 5x^2 - 6x + 1$ e responda:

a) qual é o valor correspondente ao número 2, por esta função?

b) Qual é o valor correspondente ao número $-\frac{1}{5}$, por esta função?

c) Existem dois números cujos valores correspondentes, por esta função, são iguais a zero. Quais são esses números?

2 – Qual é o valor correspondente a $\frac{1}{2}$ pela função definida por $y = -40x^2 + 18x$?

3 – Quais são os números para os quais y = - 13 na função definida por $y = 2x^2 + 5x - 13$?

RESPOSTAS
1) a) 9; b) $\frac{12}{2}$; c) $\frac{1}{5}$, 1
2) - 1
3) $\frac{5}{2}$, 0

MATEMÁTICA FINANCEIRA

De uma forma simplificada, podemos dizer que a Matemática Financeira, é o ramo da Matemática Aplicada que estuda o comportamento do dinheiro no tempo.

A Matemática Financeira busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro levando em conta a variável tempo, ou seja o valor monetário no tempo.

As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira, são: a taxa de juros, o capital e o tempo.

RAZÃO E PROPORÇÃO

RAZÃO

A razão entre duas grandezas é o quociente estabelecido entre elas, ou melhor, é o resultado da divisão entre as grandezas.

Assim, dado dois números reais a e b, com $b \neq 0$, calcula-se a razão entre a e b através do quociente da divisão de a por b.

Para indicarmos a razão entre a e b, usamos

$\frac{a}{b}$ ou a : b ("a" está para "b")

Na razão de a por b, o número "a" é chamado de antecedente, e o número "b" é chamado de consequente.

Razão entre **a** e **b** = $\frac{a}{b}$

PROPORÇÃO

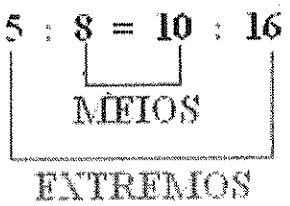
O estudo da proporção é divido em duas propriedades:

Propriedade fundamental da proporção

Quando fazemos a proporção de duas razões, iremos ter os termos dos meios e dos extremos.

$\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$ ou 5 : 8 = 10 : 16

Os números 5, 8, 10 e 16 são os termos dessa proporção sendo que 5 e 16 são os termos dos extremos e 8 e 10 são os termos dos meios.



Essa propriedade diz:

O produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Portanto, se pegarmos a proporção acima e aplicarmos essa propriedade, iremos obter o seguinte resultado:

Produto dos termos dos meios: 8 x 10 = 80
Produto dos termos dos extremos: 5 x 16 = 80

Assim, verificamos que a propriedade é verdadeira.

Propriedades da soma dos termos em uma proporção

Uma proporção é composta por duas razões, ou seja, por quatro termos, pois cada razão possui 2 termos, veja:

$$\frac{5}{4} = \frac{10}{8} \rightarrow 2^{\underline{o}}\ \text{razão}$$

$$\downarrow$$

$$1^{\underline{o}}\ \text{razão}$$

Essa propriedade diz:

Se somar os dois termos da primeira razão e dividir pelo primeiro ou pelo segundo termo, irá obter uma razão igual à soma dos dois termos da segunda razão dividida pelo terceiro ou quarto termo.

Veja o exemplo abaixo:

Dada a seguinte proporção:

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$$

$$\frac{3+5}{3} = \frac{9+15}{9} \longrightarrow \frac{8}{3} = \frac{24}{9}$$

$$\frac{3+5}{5} = \frac{9+15}{15} \longrightarrow \frac{8}{5} = \frac{24}{15}$$

Formando duas outras proporções iguais entre si.

EXERCÍCIOS

1 – Qual é a razão entre os números 50 e 40, nessa ordem?

2 – Escreva a razão entre os números 8 e 300, nessa ordem.

3 – Escreva a razão entre os números seguintes, na ordem em que eles são dados:

a) 3,1 e 6,2

b) 4 e 5,6

c) 6 e $\frac{5}{7}$

4 – No café da manhã, o número de ovos que Bete frita está para o número de pessoas na razão de 3 para 1. Responda:

a) Nessa situação, qual é a razão entre o número de pessoas e o número de ovos?

b) Qual é o significado da razão $\frac{3}{1}$?

RESPOSTA	
1 – $\frac{50}{40}$ ou 50 : 40	**2 - $\frac{8}{300}$ ou 8 : 300**
3 – a) $\frac{3,1}{6,2} = \frac{31}{62}$ ou 31 : 62 **b) $\frac{4}{5,6} = \frac{40}{56}$ ou 40 : 56** **c) $\frac{6}{\frac{5}{7}} = \frac{42}{5}$ ou 42 : 5**	**4 – a) $\frac{3}{1}$ ou 3 : 1** **b) 3 ovos para cada pessoa**

PORCENTAGEM

A porcentagem é de grande utilidade no mercado financeiro, pois é utilizada para capitalizar empréstimos e aplicações, expressar índices inflacionários e deflacionários, descontos, aumentos, taxas de juros entre outros.

No campo da Estatística possui participação ativa na apresentação de dados comparativos e organizacionais.

Os números percentuais possuem representações na forma de fração centesimal (denominador igual a 100), quando escritos de maneira formal devem aparecer na presença do símbolo de porcentagem (%). Também podem ser escritos na forma de número decimal.

Observe os números a seguir, eles serão demonstrados através das três formas possíveis:

Porcentagem	Razão centesimal	Número decimal
1%	1/100	0,01
5%	5/100	0,05
7,2%	7,2/100	0,072
12%	12/100	0,12
13,21%	13,21/100	0,1321
20%	20/100	0,20
32%	32/100	0,32
81%	81/100	0,81
100%	100/100	1
115%	115/100	1,15
320%	320/100	3,2
1200%	1200/100	12

A melhor forma de assimilar os conteúdos inerentes à porcentagem é com a utilização de exemplos que envolvem situações cotidianas.

Acompanhe os exemplos a seguir:

Exemplo 1

Uma mercadoria é vendida em, no máximo, três prestações mensais e iguais, totalizando o valor de R$ 900,00. Caso seja adquirida à vista, a loja oferece um desconto de 12% sobre o valor a prazo. Qual o preço da mercadoria na compra à vista?

Podemos utilizar a razão centesimal ou o número decimal correspondente.

12% = 12/100 = 0,12

Utilizando razão centesimal

12/100 x 900= 12x900/100= 1080/100= 10800/100= 108 reais

900 – 108 = 792 reais

Utilizando número decimal

0,12 x 900 = 108 reais

900 – 108 = 792 reais

A utilização de qualquer procedimento fica a critério próprio, pois os dois métodos chegam ao resultado de forma satisfatória e exata.

No caso do exemplo 1, o desconto no pagamento à vista é de R$ 108,00, portanto o preço é de R$ 792,00.

Exemplo 2

O FGTS (Fundo de Garantia por Tempo de Serviço) é um direito do trabalhador com carteira assinada, no qual o empregador é obrigado por lei a depositar em uma conta na Caixa Econômica Federal o valor de 8% do salário bruto do funcionário. Esse dinheiro deverá ser sacado pelo funcionário na ocorrência de demissão sem justa causa. Determine o valor do depósito efetuado pelo empregador, calculado o FGTS sobre um salário bruto de R$ 1.200,00.

8% = 8/100 = 0,08

Utilizando razão centesimal

8/100 x 1200 = 8x1200 / 100 = 9600 / 100 = 96 reais

Utilizando número decimal

0,08 x 1200 = 96 reais

O depósito efetuado será de R$ 96,00.

Exemplo 3

Em uma sala de aula com 52 alunos, 13 utilizam bicicletas como transporte. Expresse em porcentagem a quantidade de alunos que utilizam bicicleta.

Podemos utilizar uma regra de três simples.

Alunos → 13 --------- 52
Porcentagem → x ---------- 100%

52*x = 13*100
52x = 1300
x= 1300/52
x = 25%

Portanto, 25% dos alunos utilizam bicicletas.

EXERCÍCIOS

1 – Uma mercadoria que custava R$ 120,00 sofreu um desconto de R$ 8,40. Qual foi a taxa percentual de desconto?

2 – Uma população que teve aumento de 12%, passou a ser igual a 78 400 habitantes. Qual era a população antes do aumento?

3 – O número de clientes de uma loja diminuiu, num certo período, de 1 200 para 1 050. Qual foi a taxa percentual de diminuição de clientes no referido período?

4 – Uma mercadoria sofreu dois aumentos sucessivos: um de 20% em janeiro e outro de 25% em fevereiro. Calcule o aumento percentual sofrida pela mercadoria no bimestre.

5 – Uma mercadoria sofreu um aumento de 25% em janeiro e um desconto de 15% em fevereiro.

a) No bimestre, a mercadoria sofreu aumento ou desconto?

b) De quanto?

RESPOSTAS			
1) 7%	2) 70 000 habitantes	3) 12,5%	4) 50%
5 - a) aumento b) 6,25%			

JUROS SIMPLES

Podemos definir juros como o rendimento de uma aplicação financeira, valor referente ao atraso no pagamento de uma prestação ou a quantia paga pelo empréstimo de um capital.

Atualmente, o sistema financeiro utiliza o regime de juros compostos, por ser mais lucrativo.

Os juros simples eram utilizados nas situações de curto prazo, hoje não utilizamos a capitalização baseada no regime simples. Mas vamos entender como funciona a capitalização no sistema de juros simples.

No sistema de capitalização simples, os juros são calculados baseados no valor da dívida ou da aplicação.

Dessa forma, o valor dos juros é igual no período de aplicação ou composição da dívida.

A expressão matemática utilizada para o cálculo das situações envolvendo juros simples é a seguinte:

$J = C * i * t$, onde

J = juros
C = capital
i = taxa de juros
t = tempo de aplicação (mês, bimestre, trimestre, semestre, ano...)

M = C + J

M = montante final
C = capital
J = juros

Exemplo 1

Qual o valor do montante produzido por um capital de R$ 1.200,00, aplicado no regime de juros simples a uma taxa mensal de 2%, durante 10 meses?

Capital: 1200
i = 2% = 2/100 = 0,02 ao mês (a.m.)
t = 10 meses

J = C * i * t
J = 1200 * 0,02 * 10
J = 240

M = C + j
M = 1200 + 240
M = 1440

O montante produzido será de R$ 1.440,00.

Exemplo 2

Vamos construir uma planilha especificando passo a passo a aplicação de um capital durante o período estabelecido inicialmente.

Um capital de R$ 5.000,00 foi aplicado a uma taxa de juros mensais de 3% ao mês durante 12 meses.

Determine o valor dos juros produzidos e do montante final da aplicação.

Mês	Montante inicial	Juros	Montante final
1	5.000,00	5.000 * 3% = 150	5.150,00
2	5.150,00	5.000 * 3% = 150	5.300,00
3	5.300,00	5.000 * 3% = 150	5.450,00
4	5.450,00	5.000 * 3% = 150	5.600,00
5	5.600,00	5.000 * 3% = 150	5.750,00
6	5.750,00	5.000 * 3% = 150	5.900,00
7	5.900,00	5.000 * 3% = 150	6.050,00
8	6.050,00	5.000 * 3% = 150	6.200,00
9	6.200,00	5.000 * 3% = 150	6.350,00
10	6.350,00	5.000 * 3% = 150	6.500,00
11	6.500,00	5.000 * 3% = 150	6.650,00
12	6.650,00	5.000 * 3% = 150	6.800,00

O montante final foi o equivalente a R$ 6.800,00, e os juros produzidos foram iguais a R$ 1.800,00.

Exemplo 3

Determine o valor do capital que aplicado durante 14 meses, a uma taxa de 6%, rendeu juros de R$ 2.688,00.

J = C * i * t
2688 = C * 0,06 * 14
2688 = C * 0,84
C = 2688 / 0,84
C = 3200
O valor do capital é de R$ 3.200,00.

Exemplo 4

Qual o capital que, aplicado a juros simples de 1,5% ao mês, rende R$ 3.000,00 de juros em 45 dias?

J = 3000
i = 1,5% = 1,5/100 = 0,015
t = 45 dias = 45/30 = 1,5

J = C * i * t
3000 = C * 0,015 * 1,5
3000 = C * 0,0225
C = 3000 / 0,0225
C = 133.333,33
O capital é de R$ 133.333,33.

Exemplo 5

Qual foi o capital que, aplicado à taxa de juros simples de 2% ao mês, rendeu R$ 90,00 em um trimestre?

J = C * i * t
90 = C * 0,02 * 3
90 = C * 0,06
C = 90 / 0,06
C = 1500
O capital corresponde a R$ 1.500,00.

EXERCÍCIOS

1 – Uma loja vende um televisor por R$ 780,00 à vista. A prazo, o aparelho é vendido por R$ 838,50, sendo dada uma entrada de 20% do valor à vista e o restante pago após 45 dias. A taxa anual de juros simples aplicada sobre o saldo devedor é igual a:

a) 75% b) 60% c) 30% d) 20% e) 9%

2 – Maria aplicou um capital de R$ 8 000,00 à taxa de juros simples de 40%, durante 5 anos.
Responda:
a) Qual foi a quantia de juros simples, referente ao período de 1 ano, que Maria recebeu?
b) Qual foi a quantia de juro simples que ela recebeu, referente ao período de 5 anos?

RESPOSTAS	
1 - A	2 – a) R$ 3.200,00 b) 16.000,00

JUROS COMPOSTOS

O atual sistema financeiro utiliza o regime de juros compostos, pois ele oferece uma maior rentabilidade se comparado ao regime de juros simples, onde o valor dos rendimentos se torna fixo, e no caso do composto o juro incide mês a mês de acordo com o somatório acumulativo do capital com o rendimento mensal, isto é, prática do juro sobre juro. As modalidades de investimentos e financiamentos são calculadas de acordo com esse modelo de investimento, pois ele oferece um maior rendimento, originando mais lucro.

Considere que uma pessoa aplique R$ 500,00 durante 8 meses em um banco que paga 1% de juro ao mês. Qual será o valor ao final da aplicação?

A tabela demonstrará mês a mês a movimentação financeira na aplicação do regime de juros compostos.

Mês	Capital (R$)	Juros %	Montante (R$) Capital + juros
1	500	1% de 500 = 5	505
2	505	1% de 505 = 5,05	510,05
3	510,05	1% de 510,05 = 5,10	515,15
4	515,15	1% de 515,15 = 5,15	520,30
5	520,30	1% de 520,30 = 5,20	525,50
6	525,50	1% de 525,50 = 5,26	530,76
7	530,76	1% de 530,76 = 5,31	536,07
8	536,07	1% de 536,07 = 5,36	541,43

No final do 8º mês o montante será de R$ 541,43.

Uma expressão matemática utilizada no cálculo dos juros compostos é a seguinte:

$\mathbf{M = C * (1 + i)^t}$, onde:
M: montante
C: capital
i: taxa de juros
t: tempo de aplicação

Obs: Os cálculos envolvendo juros compostos exigem conhecimentos de manuseio de uma calculadora científica.

Exemplo 1

Qual o montante produzido por um capital de R$ 7.000,00 aplicados a uma taxa de juros mensais de 1,5% durante um ano?

C: R$ 7.000,00
i: 1,5% ao mês = 1,5/100 = 0,015
t: 1 ano = 12 meses

$M = C * (1 + i)^t$
$M = 7000 * (1 + 0,015)^{12}$
M = 7000 * (1,015)12
M = 7000 * 1,195618
M = 8369,33

O montante será de R$ 8.369,33.

Com a utilização dessa fórmula podemos também calcular o capital de acordo com o montante.

Exemplo 2

Calcule o valor do capital que, aplicado a uma taxa de 2% ao mês, rendeu em 10 meses a quantia de R$ 15.237,43?

M: R$ 15.237,43
t: 10
i: 2% a.m. = 2/100 = 0,02

$M = C * (1 + i)^t$
$15237,43 = C * (1 + 0,02)^{10}$
$15237,43 = C * (1,02)^{10}$
$15237,43 = C * 1,218994$
$C = 15237,43 / 1,218994$
$C = 12500,00$

O capital é de R$ 12.500,00.

Calculando a taxa de juros da aplicação

Exemplo 3

Qual a taxa de juros empregada sobre o capital de R$ 8.000,00 durante 12 meses que gerou o montante de R$ 10.145,93?

C: R$ 8.000,00
M: R$ 10.145,93
t: 12
i: ?

$$10145,93 = 8000 * (1+i)^{12}$$
$$\frac{10145,93}{8000} = (1+i)^{12}$$
$$(1+i)^{12} = 1,268241$$
$$\sqrt[12]{(1+i)^{12}} = \sqrt[12]{1,268241}$$
$$1+i = 1,02$$
$$i = 1,02 - 1$$
$$i = 0,02$$
$$i = 2\%$$

A taxa de juros da aplicação foi de 2%.

Calculando o tempo da aplicação.
(Uso de técnicas de logaritmo)

Exemplo 4

Por quanto tempo devo aplicar um capital de R$ 800,00 a uma taxa de juros de 3% ao mês, para que produza um montante de R$ 1.444,89?

C: R$ 800,00
M: R$ 1.444,89
i: 3% a.m.= 3/100 = 0,03
t: ?

$1.444,89 = 800 * (1 + 0,03)^t$
$1.444,89 = 800 * 1,03^t$
$1.444,89/800 = 1,03^t$
$1,03^t = 1,806$ (aplicar propriedade dos logaritmos)
$\log 1,03^t = \log 1,806$
$t * \log 1,03 = \log 1,806$
$t * 0,013 = 0,257$
$t = 0,257/0,013$
$t = 20$

O capital deverá ficar aplicado por 20 meses.

EXERCÍCIOS

1 – Tomei emprestada, a 5% am (juro composto), a quantia de R$ 1 700,00, para pagamento em 2 meses. Esse pagamento será de:

a) R$ 1 753,23
b) R$ 1 874,25
c) R$ 1 932,32
d) R$ 1 984,29

2 – A taxa anual de juro, que, capitalizada semestralmente, produz Cr$ 35 691,20 de juro composto, relativos ao capital de Cr$ 50 000,00 aplicado por 3 anos e 6 meses, é:

a) 0,08 aa
b) 0,1 aa
c) 0,12 aa
d) 0,16 aa

RESPOSTAS	
1 - B	2 - D

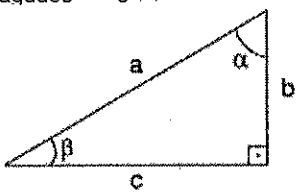
TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Em princípio, Trigonometria é o estudo da relações entre as medidas de ângulos e lados nos triângulos retângulos (trigono = triângulo e metria = medida).

Razões trigonométricas

O triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos é reto, ou seja, mede 90°.

Observe-se o triângulo ABC da figura com Â = 90° (reto), e seus ângulos agudos α e β.



É importante saber que:

a) Em relação ao ângulo α, temos:

c é o cateto oposto;

b é o cateto adjacente.

b) Em relação ao ângulo β, temos:

b é o cateto oposto;

c é o cateto adjacente.

Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

Seja α a medida de um ângulo agudo do triângulo acima, temos:

a) Seno do ângulo α (sen α):

É a razão entre a medida do cateto oposto a α e a medida da hipotenusa, ou seja:

b) Cosseno do ângulo α (cos α):

É a razão entre a medida do cateto adjacente a α e a medida da hipotenusa, isto é:

$$\cos\alpha = \frac{b}{a}$$

c) **Tangente** do ângulo α (tg α):

É a razão entre a medida do cateto oposto a α e a medida do cateto adjacente a α, isto é:

$$tg\alpha = \frac{c}{b}$$

Observação: Com relação ao ângulo β, podemos estabelecer as seguintes razões:

$$\text{sen}\,\beta = \frac{b}{a};\ \cos\beta = \frac{c}{a};\ tg\beta = \frac{b}{c}$$

Podemos concluir pelas razões obtidas que sen α = cos β, sen β = cos α, no triângulo discutido temos $\alpha + \beta = 90°$ (α e β são complementares).

Conclusão:

Dois ângulos complementares têm seno e co-seno iguais.

Aplicação

Calcular x, dados:

sen α = 0,8; cos α = 0,6; tg α = 0,75

Solução:

Primeiro é preciso decidir qual das três razões trigonométricas dadas convém ao problema.

Observe que a hipotenusa é conhecida e que x é a medida do cateto adjacente a α. Como hipotenusa e cateto adjacente são relacionados pelo cosseno, temos:

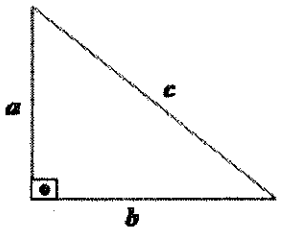
$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = 0{,}6 \\ \cos\alpha = \dfrac{x}{20}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{20} = 0{,}6 \Rightarrow x = 12$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras é considerado uma das principais descobertas da Matemática, ele descreve uma relação existente no triângulo retângulo. Vale lembrar que o triângulo retângulo pode ser identificado pela existência de um ângulo reto, isto é, medindo 90º. O triângulo retângulo é formado por dois catetos e a hipotenusa, que constitui o maior segmento do triângulo e é localizada oposta ao ângulo reto. Observe:

Catetos: a e b
Hipotenusa: c

O Teorema diz que: **"a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa."**

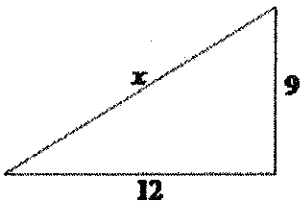


$a^2 + b^2 = c^2$

Exemplo 1

Calcule o valor do segmento desconhecido no triângulo retângulo a seguir.

$x^2 = 9^2 + 12^2$
$x^2 = 81 + 144$
$x^2 = 225$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{225}$
$x = 15$

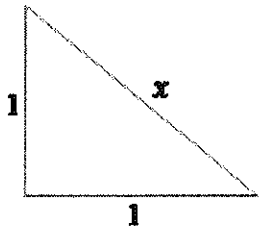


Foi através do Teorema de Pitágoras que os conceitos e as definições de números irracionais começaram a ser introduzidos na Matemática.

O primeiro irracional a surgir foi $\sqrt{2}$, que apareceu ao ser calculada a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos medindo 1. Veja:

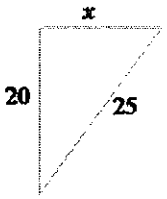
$x^2 = 1^2 + 1^2$
$x^2 = 1 + 1$
$x^2 = 2$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{2}$
$x = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = 1{,}414213562373....$



Exemplo 2

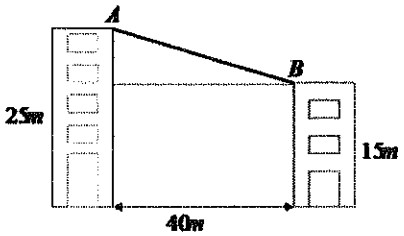
Calcule o valor do cateto no triângulo retângulo abaixo:



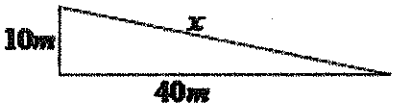
$x^2 + 20^2 = 25^2$
$x^2 + 400 = 625$
$x^2 = 625 - 400$
$x^2 = 225$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{225}$
$x = 15$

Exemplo 3

Um ciclista acrobático vai atravessar de um prédio a outro com uma bicicleta especial, percorrendo a distância sobre um cabo de aço, como demonstra o esquema a seguir:



Qual é a medida mínima do comprimento do cabo de aço?



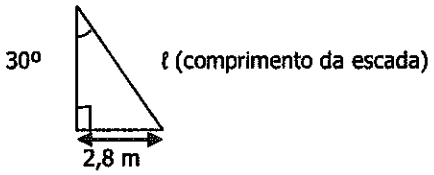
Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$x^2 = 10^2 + 40^2$
$x^2 = 100 + 1600$
$x^2 = 1700$
$x = 41{,}23$ (aproximadamente)

EXERCÍCIOS

1 – Um ângulo interno de um triângulo retângulo é tal que tg α = 2. Calcule sen α e cos α.

2 – Uma escada está apoiada no solo e numa parede vertical. A distância entre o ponto de apoio da escada no solo e a parede é de 2,8m. O ângulo formado pela escada e a parede é igual a 30º. Calcule o comprimento da escada.



RESPOSTAS	
1) $\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$	2) ℓ = 5,6 m

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar que levou ao desenvolvimento da Análise Combinatória, parte da Matemática que estuda os métodos de contagem.

Esses estudos foram iniciados já no século XVI, pelo matemático italiano Niccollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia. Depois vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar - de uma forma indireta - o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

Fatorial

Seja n um número inteiro não negativo. Definimos o fatorial de n (indicado pelo símbolo n!) como sendo:

n! = n .(n-1) . (n-2) . ... .4.3.2.1 para n ³ 2.

Para n = 0 , teremos : 0! = 1.
Para n = 1 , teremos : 1! = 1

Exemplos:

a) 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720
b) 4! = 4.3.2.1 = 24
c) observe que 6! = 6.5.4!
d) 10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1
e) 10! = 10.9.8.7.6.5!
f) 10! = 10.9.8!

Princípio fundamental da contagem - PFC

Se determinado acontecimento ocorre em n etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de k_1 maneiras diferentes, a segunda de k_2 maneiras diferentes, e assim sucessivamente, então o número total T de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por:
$T = k_1 . k_2 . k_3 . ... . k_n$

Exemplo:

O DETRAN decidiu que as placas dos veículos do Brasil serão codificadas usando-se 3 letras do alfabeto e 4 algarismos. Qual o número máximo de veículos que poderá ser licenciado?

Solução:

Usando o raciocínio anterior, imaginemos uma placa genérica do tipo PWR-USTZ.

Como o alfabeto possui 26 letras e nosso sistema numérico possui 10 algarismos (de 0 a 9), podemos concluir que: para a 1ª posição, temos 26 alternativas, e como pode haver repetição, para a 2ª, e 3ª também teremos 26 alternativas. Com relação aos algarismos, concluímos facilmente que temos 10 alternativas para cada um dos 4 lugares.

Podemos então afirmar que o número total de veículos que podem ser licenciados será igual a: 26.26.26.10.10.10.10 que resulta em 175.760.000. Observe que se no país existissem 175.760.001 veículos, o sistema de códigos de emplacamento teria que ser modificado, já que não existiriam números suficientes para codificar todos os veículos.

Permutações simples

Permutações simples de n elementos distintos são os agrupamentos formados com todos os n elementos e que diferem uns dos outros pela ordem de seus elementos.

Exemplo: com os elementos A,B,C são possíveis as seguintes permutações: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA.

O número total de permutações simples de n elementos distintos é dado por n!, isto é

$P_n = n!$ onde $n! = n(n-1)(n-2)... .1$.

Exemplos:

a) $P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

b) Calcule o número de formas distintas de 5 pessoas ocuparem os lugares de um banco retangular de cinco lugares.

$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$

Denomina-se **anagrama** o agrupamento formado pelas letras de uma palavra, que podem ter ou não significado na linguagem comum.

Exemplo:

Os possíveis anagramas da palavra REI são:

REI, RIE, ERI, EIR, IRE e IER.

Permutações com elementos repetidos

Se entre os n elementos de um conjunto, existem a elementos repetidos, b elementos repetidos, c elementos repetidos e assim sucessivamente, o número total de permutações que podemos formar é dado por:

$$P_n^{(a,b,c,...)} = \frac{n!}{a!b!c!...}$$

Exemplo:

Determine o número de anagramas da palavra MATEMÁTICA.(não considere o acento)

Solução:

Temos 10 elementos, com repetição. Observe que a letra M está repetida duas vezes, a letra A três , a letra T, duas vezes. Na fórmula anterior, teremos: n=10, a=2, b=3 e c=2. Sendo k o número procurado, podemos escrever:

k= 10! / (2!.3!.2!) = 151200

Resposta: 151200 anagramas.

Arranjos simples

Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjo simples de taxa k , a todo agrupamento de k elementos distintos dispostos numa certa ordem. Dois arranjos diferem entre si, pela ordem de colocação dos elementos. Assim, no conjunto E = {a,b,c}, teremos:

a) arranjos de taxa 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb.
b) arranjos de taxa 3: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Representando o número total de arranjos de n elementos tomados k a k (taxa k) por $A_{n,k}$, teremos a seguinte fórmula:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Obs: é fácil perceber que $A_{n,n} = n! = P_n$. (Verifique)

Exemplo:

Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0,1,2,...,9. O segredo do cofre é marcado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer(no máximo) para conseguir abri-lo?

Solução:

As sequências serão do tipo xyz. Para a primeira posição, teremos 10 alternativas, para a segunda, 9 e para a terceira, 8. Podemos aplicar a fórmula de arranjos, mas pelo princípio fundamental de contagem, chegaremos ao mesmo resultado:

10.9.8 = 720.

Observe que 720 = $A_{10,3}$

Combinações simples

Denominamos combinações simples de n elementos distintos tomados k a k (taxa k) aos subconjuntos formados por k elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados.

Observe que duas combinações são diferentes quando possuem elementos distintos, não importando a ordem em que os elementos são colocados.

Exemplo:

No conjunto E= {a,b.c,d} podemos considerar:

a) combinações de taxa 2: ab, ac, ad, bc, bd, cd.
b) combinações de taxa 3: abc, abd, acd, bcd.
c) combinações de taxa 4: abcd.

Representando por $C_{n,k}$ o número total de combinações de n elementos tomados k a k (taxa k) , temos a seguinte fórmula:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Nota: o número acima é também conhecido como **número binomial** e indicado por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemplo:

Uma prova consta de 15 questões das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?

Solução:

Observe que a ordem das questões não muda o teste. Logo, podemos concluir que trata-se de um problema de combinação de 15 elementos com taxa 10.

Aplicando simplesmente a fórmula chegaremos a:

$C_{15,10}$ = 15! / [(15-10)! . 10!] = 15! / (5! . 10!) = 15.14.13.12.11.10! / 5.4.3.2.1.10! = 3003

PROBABILIDADE

A história da teoria das probabilidades teve início com os jogos de cartas, dados e de roleta. Esse é o motivo da grande existência de exemplos de jogos de azar no estudo da probabilidade. A teoria da probabilidade permite que se calcule a chance de ocorrência de um número em um experimento aleatório.

Experimento Aleatório

É aquele experimento que quando repetido em iguais condições, podem fornecer resultados diferentes, ou seja, são resultados explicados ao acaso. Quando se fala de tempo e possibilidades de ganho na loteria, a abordagem envolve cálculo de experimento aleatório.

Espaço Amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. A letra que representa o espaço amostral, é S.

Exemplo:

Lançando uma moeda e um dado, simultaneamente, sendo S o espaço amostral, constituído pelos 12 elementos:

S = {K1, K2, K3, K4, K5, K6, R1, R2, R3, R4, R5, R6}

Escreva explicitamente os seguintes eventos: A={caras e um número par aparece}, B={um número primo aparece}, C={coroas e um número ímpar aparecem}.

Idem, o evento em que:

a) A ou B ocorrem;

b) B e C ocorrem;

c) Somente B ocorre.

Quais dos eventos A, B e C são mutuamente exclusivos?

Resolução:

Para obter A, escolhemos os elementos de S constituídos de um K e um número par: A={K2, K4, K6};

Para obter B, escolhemos os pontos de S constituídos de números primos: B={K2,K3,K5,R2,R3,R5}

Para obter C, escolhemos os pontos de S constituídos de um R e um número ímpar: C={R1,R3,R5}.

(a) A ou B = AUB = {K2,K4,K6,K3,K5,R2,R3,R5}

(b) B e C = B $\cap$ C = {R3,R5}

(c) Escolhemos os elementos de B que não estão em A ou C;

B $\cap$ Ç $A^c \cap$ Ç $\cap C^c$ = {K3,K5,R2}

A e C são mutuamente exclusivos, porque A $\cap$ C = Ø

Conceito de probabilidade

Se em um fenômeno aleatório as possibilidades são igualmente prováveis, então a probabilidade de ocorrer um evento A é:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Por, exemplo, no lançamento de um dado, um número par pode ocorrer de 3 maneiras diferentes dentre 6 igualmente prováveis, portanto, P = 3/6= 1/2 = 50%

Dizemos que um espaço amostral S (finito) é equiprovável quando seus eventos elementares têm probabilidades iguais de ocorrência.

Num espaço amostral equiprovável S (finito), a probabilidade de ocorrência de um evento A é sempre:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de A}}{\text{número de elementos de S}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Propriedades Importantes:

1. Se A e A' são eventos complementares, então:

P(A) + P(A') = 1

2. A probabilidade de um evento é sempre um número entre Æ (probabilidade de evento impossível) e 1 (probabilidade do evento certo).

$$0 \leq P(S) \leq 1$$

Probabilidade Condicional

Antes da realização de um experimento, é necessário que já tenha alguma informação sobre o evento que se deseja observar. Nesse caso, o espaço amostral se modifica e o evento tem a sua probabilidade de ocorrência alterada.

Fórmula de Probabilidade Condicional

$P(E_1$ e E_2 e E_3 e ...e E_{n-1} e $E_n)$ é igual a

$P(E_1).P(E_2/E_1).P(E_3/E_1$ e $E_2)...P(E_n/E_1$ e E_2 e ...E_n-1).

Onde $P(E_2/E_1)$ é a probabilidade de ocorrer E_2, condicionada pelo fato de já ter ocorrido E_1;

$P(E_3/E_1$ e $E_2)$ é a probabilidade ocorrer E_3, condicionada pelo fato de já terem ocorrido E_1 e E_2;

$P(Pn/E_1$ e E_2 e ...E_n-1) é a probabilidade de ocorrer E_n, condicionada ao fato de já ter ocorrido E_1 e E_2...E_n-1.

Exemplo:

Uma urna tem 30 bolas, sendo 10 vermelhas e 20 azuis. Se ocorrer um sorteio de 2 bolas, uma de cada vez e sem reposição, qual será a probabilidade de a primeira ser vermelha e a segunda ser azul?

Resolução:
Seja o espaço amostral S=30 bolas, e considerarmos os seguintes eventos:

A: vermelha na primeira retirada e P(A) = 10/30
B: azul na segunda retirada e P(B) = 20/29

Assim:
P(A e B) = P(A).(B/A) = 10/30.20/29 = 20/87

Eventos independentes

Dizemos que E_1 e E_2 e ...E_{n-1}, E_n são eventos independentes quando a probabilidade de ocorrer um deles não depende do fato de os outros terem ou não terem ocorrido.

Fórmula da probabilidade dos eventos independentes:

$P(E_1$ e E_2 e E_3 e ...e E_n-1 e $E_n) = P(E_1).P(E_2).p(E_3)...P(E_n)$

Exemplo:

Uma urna tem 30 bolas, sendo 10 vermelhas e 20 azuis. Se sortearmos 2 bolas, 1 de cada vez e repondo a sorteada na urna, qual será a probabilidade de a primeira ser vermelha e a segunda ser azul?

Resolução:

Como os eventos são independentes, a probabilidade de sair vermelha na primeira retirada e azul na segunda retirada é igual ao produto das probabilidades de cada condição, ou seja, P(A e B) = P(A).P(B). Ora, a probabilidade de sair vermelha na primeira retirada é 10/30 e a de sair azul na segunda retirada 20/30. Daí, usando a regra do produto, temos: 10/30.20/30=2/9.

Observe que na segunda retirada foram consideradas todas as bolas, pois houve reposição. Assim, P(B/A) =P(B), porque o fato de sair bola vermelha na primeira retirada não influenciou a segunda retirada, já que ela foi reposta na urna.

Probabilidade de ocorrer a união de eventos

Fórmula da probabilidade de ocorrer a união de eventos:
$P(E_1$ ou $E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1$ e $E_2)$

De fato, se existirem elementos comuns a E_1 e E_2, estes eventos estarão computados no cálculo de $P(E_1)$ e $P(E_2)$.

Para que sejam considerados uma vez só, subtraímos $P(E_1$ e $E_2)$.

Fórmula de probabilidade de ocorrer a união de eventos mutuamente exclusivos:
$P(E1$ ou E_2 ou E_3 ou ... ou $E_n) = P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n)$

Exemplo: Se dois dados, azul e branco, forem lançados, qual a probabilidade de sair 5 no azul e 3 no branco?

Considerando os eventos:

A: Tirar 5 no dado azul e P(A) = 1/6
B: Tirar 3 no dado branco e P(B) = 1/6

Sendo S o espaço amostral de todos os possíveis resultados, temos:
n(S) = 6.6 = 36 possibilidades.

Daí, temos:P(A ou B) = 1/6 + 1/6 – 1/36 = 11/36

Exemplo: Se retirarmos aleatoriamente uma carta de baralho com 52 cartas, qual a probabilidade de ser um 8 ou um Rei?

Sendo S o espaço amostral de todos os resultados possíveis, temos: n(S) = 52 cartas.

Considere os eventos:
A: sair 8 e P(A) = 4/52
B: sair um rei e P(B) = 4/52
Assim, P(A ou B) = 4/52 + 4/52 – 0 = 8/52 = 2/13. Note que P(A e B) = 0, pois uma carta não pode ser 8 e rei ao mesmo tempo. Quando isso ocorre dizemos que os eventos A e B são mutuamente exclusivos.

EXERCÍCIOS

01 - Um coquetel é preparado com duas ou mais bebidas distintas. Se existem 7 bebidas distintas, quantos coquetéis diferentes podem ser preparados?

a) 20
b) 120
c) 10
d) 110

02 - Sobre uma circunferência são marcados 9 pontos distintos. Quantos triângulos podem ser construídos com vértices nos 9 pontos marcados?

a) 84
b) 74
c) 64
d) 54

03 - Uma família com 5 pessoas possui um automóvel de 5 lugares. Sabendo que somente 2 pessoas sabem dirigir, de quantos modos poderão se acomodar para uma viagem?

a) 38
b) 48
c) 26
d) 16

04 - Sabendo-se que a probabilidade de que um animal adquira certa enfermidade, no decurso de cada mês, é igual a 30%, a probabilidade de que um animal sadio venha a contrair a doença só no 3° mês é igual a:

a) 21%
b) 49%
c) 6,3%
d) 14,7%

05 - A eficácia de um teste de laboratório para checar certa doença nas pessoas que comprovadamente têm essa doença é de 90%. Esse mesmo teste, porém, produz um falso-positivo (acusa positivo em quem não tem comprovadamente a doença) da ordem de 1%. Em um grupo populacional em que a incidência dessa doença é de 0,5%, seleciona-se uma pessoa ao acaso para fazer o teste. Qual a probabilidade de que o resultado desse teste venha a ser positivo?

a) 1,443%
b) 1,444%
c) 1,445%
d) 1,446%

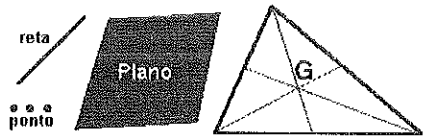
06 - A probabilidade de um atirador acertar um alvo em um único tiro é 0,2. Com apenas 4 tiros, qual a probabilidade de esse atirador acertar o alvo só duas vezes?

a) 15,26%
b) 16,25%
c) 16,36%
d) 15,36%

RESPOSTAS					
1 - B	2 - A	3 - B	4 - D	5 - C	6 - D

GEOMETRIA PLANA
ELEMENTOS

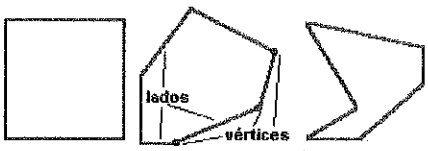
A geometria plana, também chamada geometria elementar ou Euclidiana, teve início na Grécia antiga. Esse estudo analisava as diferentes formas de objetos, e baseia-se em três conceitos básicos: ponto, reta e plano. A geometria está apoiada sobre alguns postulados, axiomas, definições e teoremas, sendo que essas definições e postulados são usados para demonstrar a validade de cada teorema.



A Geometria permite que façamos uso dos conceitos elementares para construir outros objetos mais complexos como: pontos especiais, retas especiais, planos dos mais variados tipos, ângulos, médias, centros de gravidade de objetos, etc.

Algumas definições

Polígono: É uma figura plana formada por três ou mais segmentos de reta que se intersectam dois a dois. Os segmentos de reta são denominados lados do polígono.Os pontos de intersecção são denominados vértices do polígono. A região interior ao polígono é muitas vezes tratada como se fosse o próprio polígono.

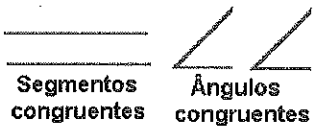


Polígono convexo: É um polígono construído de modo que os prolongamentos dos lados nunca ficarão no interior da figura original. Se dois pontos pertencem a um polígono convexo, então todo o segmento tendo estes dois pontos como extremidades, estará inteiramente contido no polígono.

Polígono	Nº de lados	Polígono	Nº de lados
Triângulo	3	Quadrilátero	4
Pentágono	5	Hexágono	6
Heptágono	7	Octógono	8
Eneágono	9	Decágono	10
Undecágono	11	Dodecágono	12

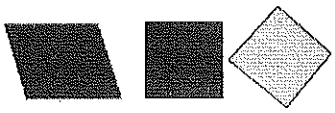
Polígono não convexo: Um polígono é dito não convexo se dados dois pontos do polígono, o segmento que tem estes pontos como extremidades, contiver pontos que estão fora do polígono.

Segmentos congruentes: Dois segmentos ou ângulos são congruentes quando têm as mesmas medidas.



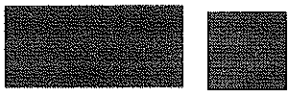
Paralelogramo: É um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos. Pode-se mostrar que num paralelogramo:

- Os lados opostos são congruentes;
- Os ângulos opostos são congruentes;
- A soma de dois ângulos consecutivos vale 180°;
- As diagonais cortam-se ao meio.



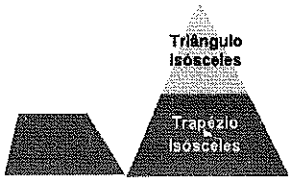
Losango: Paralelogramo que tem todos os quatro lados congruentes. As diagonais de um losango formam um ângulo de 90°.

Retângulo: É um paralelogramo com quatro ângulos retos e dois pares de lados paralelos.



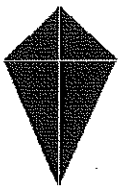
Quadrado: É um paralelogramo que é ao mesmo tempo um losango e um retângulo. O quadrado possui quatro lados com a mesma medida e também quatro ângulos retos.

Trapézio: Quadrilátero que só possui dois lados opostos paralelos com comprimentos distintos, denominados base menor e base maior. Pode-se mostrar que o segmento que liga os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e o seu comprimento é a média aritmética das somas das medidas das bases maior e menor do trapézio.



Trapézio isósceles: Trapézio cujos lados não paralelos são congruentes. Neste caso, existem dois ângulos congruentes e dois lados congruentes. Este quadrilátero é obtido pela retirada de um triângulo isósceles menor superior (amarelo) do triângulo isósceles maior.

"Pipa" ou "papagaio": É um quadrilátero que tem dois pares de lados consecutivos congruentes, mas os seus lados opostos não são congruentes.



Neste caso, pode-se mostrar que as diagonais são perpendiculares e que os ângulos opostos ligados pela diagonal menor são congruentes.

EXERCÍCIOS

1 - Polígono construído de modo que os prolongamentos dos lados nunca ficarão no interior da figura original.

a) polígono convexo b) polígono não convexo

2 – A figura abaixo trata-se de um:

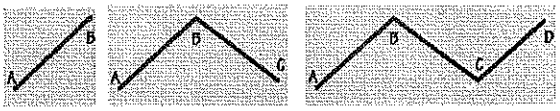
a) trapézio
b) paralelogramo
c) losango
d) retângulo

RESPOSTAS	
1 - A	2 - B

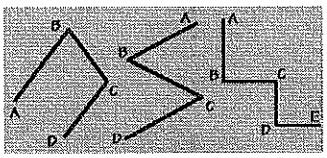
POLÍGONOS E TRIÂNGULOS

Segmentos Lineares e poligonais abertas

A seguir, apresentamos um segmento, dois segmentos consecutivos e três segmentos consecutivos. Segmentos consecutivos são aqueles em que a extremidade final do primeiro segmento é a extremidade inicial do segundo e a extremidade final do segundo é a extremidade inicial do terceiro e assim por diante.

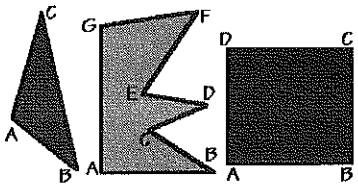


Uma linha poligonal aberta é formada por segmentos de reta consecutivos e não colineares, ou seja, segmentos de reta que não estão alinhados na mesma reta e que não se fecham.



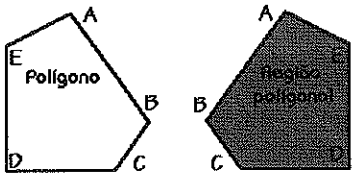
Polígono (Poligonal fechada) e Região poligonal

Polígono é uma figura geométrica cuja palavra é proveniente do grego que quer dizer: poli (muitos) + gonos (ângulos). Um polígono é uma linha poligonal fechada formada por segmentos consecutivos, não colineares que se fecham.



A região interna a um polígono é a região plana delimitada por um polígono.

Muitas vezes encontramos na literatura sobre Geometria a palavra polígono identificada com a região localizada dentro da linha poligonal fechada, mas é bom deixar claro que polígono representa apenas a linha. Quando não há perigo na informação sobre o que se pretende obter, pode-se usar a palavra num ou no outro sentido.



Considerando a figura anexada, observamos que:

- Os segmentos AB, BC, CD, DE e EA são os lados do polígono e da região poligonal.

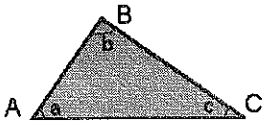
- Os pontos A, B, C, D, E são os vértices da região poligonal e do polígono.

- Os ângulos da linha poligonal, da região poligonal fechada e do polígono são: A, B, C, D e E.

Triângulos e a sua classificação

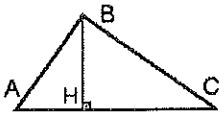
Triângulo é um polígono de três lados. É o polígono que possui o menor número de lados. Talvez seja o polígono mais importante que existe. Todo triângulo possui alguns elementos e os principais são: vértices, lados, ângulos, alturas, medianas e bissetrizes.

Apresentaremos agora alguns objetos com detalhes sobre os mesmos.

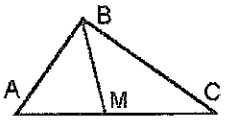


- Vértices: A,B,C.
- Lados: AB,BC e AC.
- Ângulos internos: a, b e c.

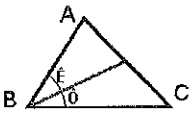
Altura: É um segmento de reta traçado a partir de um vértice de forma a encontrar o lado oposto ao vértice formando um ângulo reto. BH é uma altura do triângulo.



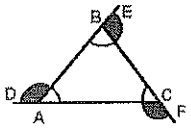
Mediana: É o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. BM é uma mediana.



Bissetriz: É a semi-reta que divide um ângulo em duas partes iguais. O ângulo B está dividido ao meio e neste caso Ê = Ô.

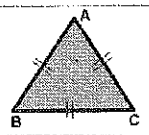
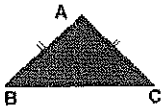
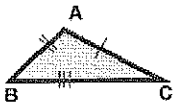


Ângulo Interno: É formado por dois lados do triângulo. Todo triângulo possui três ângulos internos.

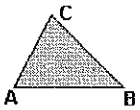
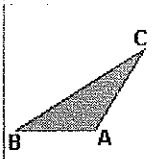
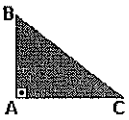


Ângulo Externo: É formado por um dos lados do triângulo e pelo prolongamento do lado adjacente(ao lado).

Classificação dos triângulos quanto ao número de lados

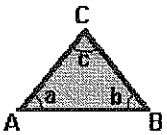
Triângulo Equilátero	Os três lados têm medidas iguais. m(AB)=m(BC)=m(CA)	
Triângulo Isósceles	Dois lados têm a mesma medida. m(AB)=m(AC)	
Triângulo Escaleno	Todos os três lados têm medidas diferentes.	

Classificação dos triângulos quanto às medidas dos ângulos

Triângulo Acutângulo	Todos os ângulos internos são agudos, isto é, as medidas dos ângulos são menores do que 90°.	
Triângulo Obtusângulo	Um ângulo interno é obtuso, isto é, possui um ângulo com medida maior do que 90°.	
Triângulo Retângulo	Possui um ângulo interno reto (90 graus).	

Medidas dos ângulos de um triângulo

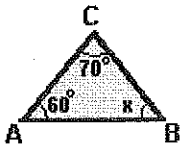
Ângulos Internos: Consideremos o triângulo ABC. Poderemos identificar com as letras a, b e c as medidas dos ângulos internos desse triângulo. Em alguns locais, escrevemos as letras maiúsculas A, B e C para representar os ângulos.



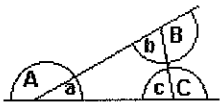
A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180 graus, isto é:

$$a + b + c = 180°$$

Exemplo: Considerando o triângulo abaixo, podemos escrever que: 70°+60°+x=180° e dessa forma, obtemos x=180°-70°-60°=50°.



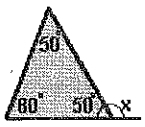
Ângulos Externos: Consideremos o triângulo ABC. Como observamos no desenho, em anexo, as letras minúsculas representam os ângulos internos e as respectivas letras maiúsculas os ângulos externos.



Todo ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a esse ângulo externo. Assim:

$$A = b+c, \quad B = a+c, \quad C = a+b$$

Exemplo: No triângulo desenhado abaixo: x=50°+80°=130°.



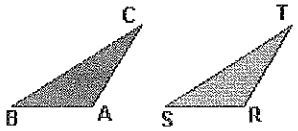
Congruência de Triângulos

A idéia de congruência: Duas figuras planas são congruentes quando têm a mesma forma e as mesmas dimensões, isto é, o mesmo tamanho.

Para escrever que dois triângulos ABC e DEF são congruentes, usaremos a notação:

ABC ~ DEF

Para os triângulos das figuras abaixo:



existe a congruência entre os lados, tal que:

AB ~ RS, BC ~ ST, CA ~ TR

e entre os ângulos:

A ~ R , B ~ S , C ~ T

Se o triângulo ABC é congruente ao triângulo RST, escrevemos:

ABC ~ RST

Dois triângulos são congruentes, se os seus elementos correspondentes são ordenadamente congruentes, isto é, os três lados e os três ângulos de cada triângulo têm respectivamente as mesmas medidas.

Para verificar se um triângulo é congruente a outro, não é necessário saber a medida de todos os seis elementos, basta conhecer três elementos, entre os quais esteja presente pelo menos um lado.

EXERCÍCIOS

1 - Assinale as alternativa incorretas:

a) Triângulo equilátero: Os três lados têm medidas iguais.

b) Triângulo isósceles: Dois lados têm a mesma medida.

c) Triângulo escaleno: Todos os três lados têm medidas iguais.

d) Triângulo acutângulo: Todos os ângulos internos são agudos, isto é, as medidas dos ângulos são maiores do que 90°.

e) Triângulo obtusângulo: Um ângulo interno é obtuso, isto é, possui um ângulo com medida maior do que 90°.

f) Triângulo retângulo: Possui um ângulo interno obtuso (90 graus).

RESPOSTAS
C – D - F

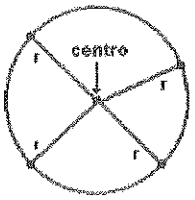
CÍRCULO, CIRCUNFERÊNCIA E ARCOS

A importância da circunferência

A circunferência possui características não comumente encontradas em outras figuras planas, como o fato de ser a única figura plana que pode ser rodada em torno de um ponto sem modificar sua posição aparente. É também a única figura que é simétrica em relação a um número infinito de eixos de simetria. A circunferência é importante em praticamente todas as áreas do conhecimento como nas Engenharias, Matemática, Física, Química, Biologia, Arquitetura, Astronomia, Artes e também é muito utilizado na indústria e bastante utilizada nas residências das pessoas.

Circunferência e Círculo

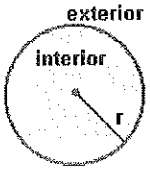
Circunferência: A circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão localizados a uma mesma distância r de um ponto fixo denominado o centro da circunferência. Esta talvez seja a curva mais importante no contexto das aplicações.



Círculo: é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo O é menor ou igual que uma distância r dada. Quando a distância é nula, o círculo se reduz a um ponto. O círculo é a reunião da circunferência com o conjunto de pontos localizados dentro da mesma. No gráfico acima, a circunferência é a linha de cor verde-escuro que envolve a região verde, enquanto o círculo é toda a região pintada de verde reunida com a circunferência.

Pontos interiores de um círculo e exteriores a um círculo

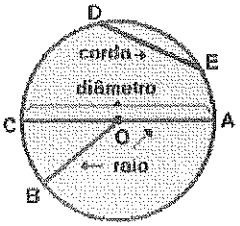
Pontos interiores: Os pontos interiores de um círculo são os pontos do círculo que não estão na circunferência.



Pontos exteriores: Os pontos exteriores a um círculo são os pontos localizados fora do círculo.

Raio, corda e diâmetro

Raio: Raio de uma circunferência (ou de um círculo) é um segmento de reta com uma extremidade no centro da circunferência e a outra extremidade num ponto qualquer da circunferência. Na figura, os segmentos de reta OA, OB e OC são raios.

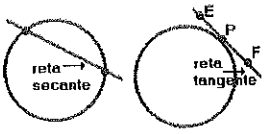


Corda: Corda de uma circunferência é um segmento de reta cujas extremidades pertencem à circunferência. Na figura, os segmentos de reta AC e DE são cordas.

Diâmetro: Diâmetro de uma circunferência (ou de um círculo) é uma corda que passa pelo centro da circunferência. Observamos que o diâmetro é a maior corda da circunferência. Na figura, o segmento de reta AC é um diâmetro.

Posições relativas de uma reta e uma circunferência

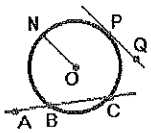
Reta secante: Uma reta é secante a uma circunferência se essa reta intercepta a circunferência em dois pontos quaisquer, podemos dizer também que é a reta que contém uma corda.



Reta tangente: Uma reta tangente a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência em um único ponto P. Este ponto é conhecido como ponto de tangência ou ponto de contato. Na figura ao lado, o ponto P é o ponto de tangência e a reta que passa pelos pontos E e F é uma reta tangente à circunferência.

Observações:

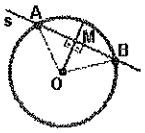
Raios e diâmetros são nomes de segmentos de retas mas às vezes são também usados como os comprimentos desses segmentos. Por exemplo, podemos dizer que ON é o raio da circunferência, mas é usual dizer que o raio ON da circunferência mede 10cm ou que o raio ON tem 10cm.



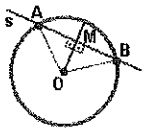
Tangentes e secantes são nomes de retas, mas também são usados para denotar segmentos de retas ou semi-retas. Por exemplo, "A tangente PQ" pode significar a reta tangente à circunferência que passa pelos pontos P e Q mas também pode ser o segmento de reta tangente à circunferência que liga os pontos P e Q. Do mesmo modo, a "secante AC" pode significar a reta que contém a corda BC e também pode ser o segmento de reta ligando o ponto A ao ponto C.

Propriedades das secantes e tangentes

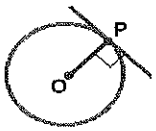
Se uma reta s, secante a uma circunferência de centro O, intercepta a circunferência em dois pontos distintos A e B e se M é o ponto médio da corda AB, então o segmento de reta OM é perpendicular à reta secante s.



Se uma reta s, secante a uma circunferência de centro O, intercepta a circunferência em dois pontos distintos A e B, a perpendicular à reta s que passa pelo centro O da circunferência, passa também pelo ponto médio da corda AB.



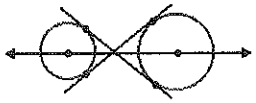
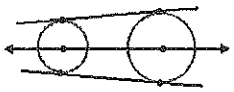
Seja OP um raio de uma circunferência, onde O é o centro e P um ponto da circunferência. Toda reta perpendicular ao raio OP é tangente à circunferência no ponto de tangência P.



Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

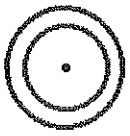
Posições relativas de duas circunferências

Reta tangente comum: Uma reta que é tangente a duas circunferências ao mesmo tempo é denominada uma tangente comum. Há duas possíveis retas tangentes comuns: a interna e a externa.

Tangente comum interna	Tangente comum externa
	

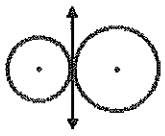
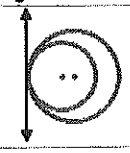
Ao traçar uma reta ligando os centros de duas circunferências no plano, esta reta separa o plano em dois semi-planos. Se os pontos de tangência, um em cada circunferência, estão no mesmo semi-plano, temos uma reta tangente comum externa. Se os pontos de tangência, um em cada circunferência, estão em semi-planos diferentes, temos uma reta tangente comum interna.

Circunferências internas: Uma circunferência C1 é interna a uma circunferência C2, se todos os pontos do círculo C1 estão contidos no círculo C2. Uma circunferência é externa à outra se todos os seus pontos são pontos externos à outra.



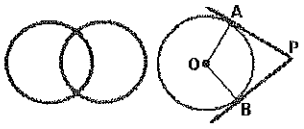
Circunferências concêntricas: Duas ou mais circunferências com o mesmo centro mas com raios diferentes são circunferências concêntricas.

Circunferências tangentes: Duas circunferências que estão no mesmo plano, são tangentes uma à outra, se elas são tangentes à mesma reta no mesmo ponto de tangência.

Circunferências tangentes externas	Circunferências tangentes internas
	

As circunferências são tangentes externas uma à outra se os seus centros estão em lados opostos da reta tangente comum e elas são tangentes internas uma à outra se os seus centros estão do mesmo lado da reta tangente comum.

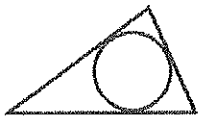
Circunferências secantes: são aquelas que possuem somente dois pontos distintos em comum.



Segmentos tangentes: Se AP e BP são segmentos de reta tangentes à circunferência nos ponto A e B, então esses segmentos AP e BP são congruentes.

Polígonos circunscritos

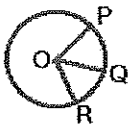
Polígono circunscrito a uma circunferência é o que possui seus lados tangentes à circunferência. Ao mesmo tempo, dizemos que esta circunferência está inscrita no polígono.

Quadrilátero circunscrito	Triângulo circunscrito
	

Propriedade dos quadriláteros circunscritos: Se um quadrilátero é circunscrito a uma circunferência, a soma de dois lados opostos é igual a soma dos outros dois lados.

Arco de circunferência e ângulo central

Seja a circunferência de centro O traçada ao lado. Pela definição de circunferência temos que OP=OQ=OR=... e isto indica que os raios de uma circunferência são segmentos congruentes.

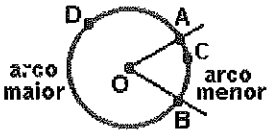


Circunferências congruentes: São circunferências que possuem raios congruentes. Aqui a palavra raio refere-se ao segmento de reta e não a um número.

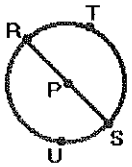
Ângulo central: Em uma circunferência, o ângulo central é aquele cujo vértice coincide com o centro da circunferência. Na figura, o ângulo a é um ângulo central. Se numa circunferência de centro O, um ângulo central determina um arco AB, dizemos que AB é o arco correspondente ao ângulo AÔB.

Arco menor: É um arco que reúne dois pontos da circunferência que não são extremos de um diâmetro e todos os pontos da circunferência que estão dentro do ângulo central cujos lados contém os dois pontos. Na figura, a linha vermelha indica o arco menor AB ou arco menor ACB.

Arco maior: É um arco que liga dois pontos da circunferência que não são extremos de um diâmetro e todos os pontos da circunferência que estão fora do ângulo central cujos lados contém os dois pontos. Na figura, o ponto D está no arco maior ADB enquanto o ponto C não está no arco maior mas está no arco menor AB, assim é frequentemente usado três letras para representar o arco maior.

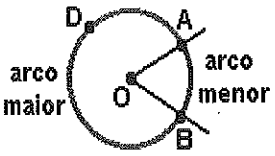


Semicircunferência: É um arco obtido pela reunião dos pontos extremos de um diâmetro com todos os pontos da circunferência que estão em um dos lados do diâmetro. O arco RTS é uma semicircunferência da circunferência de centro P e o arco RUS é outra.



Observações: Em uma circunferência dada, temos que:

- A medida do arco menor é a medida do ângulo central correspondente a m(AÔB) e a medida do arco maior é 360 graus menos a medida do arco menor m(AÔB).



- A medida da semicircunferência é 180 graus ou Pi radianos.

- Em circunferências congruentes ou em uma simples circunferência, arcos que possuem medidas iguais são arcos congruentes.

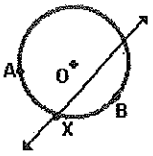
- Em uma circunferência, se um ponto E está entre os pontos D e F, que são extremidades de um arco menor, então: m(DE)+m(EF)=m(DF).

- Se o ponto E está entre os pontos D e F, extremidades de um arco maior: m(DE)+m(EF)=m(DEF).

- Apenas esta última relação faz sentido para as duas últimas figuras apresentadas.

Propriedades de arcos e cordas

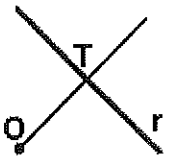
Uma corda de uma circunferência é um segmento de reta que une dois pontos da circunferência. Se os extremos de uma corda não são extremos de um diâmetro eles são extremos de dois arcos de circunferência sendo um deles um arco menor e o outro um arco maior. Quando não for especificada, a expressão arco de uma corda se referirá ao arco menor e quanto ao arco maior sempre teremos que especificar.



Observações:

- Se um ponto X está em um arco AB e o arco AX é congruente ao arco XB, o ponto X é o ponto médio do arco AB. Além disso, qualquer segmento de reta que contém o ponto X é um segmento bissetor do arco AB. O ponto médio do arco não é o centro do arco, o centro do arco é o centro da circunferência que contém o arco.

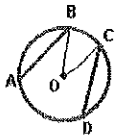
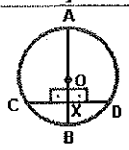
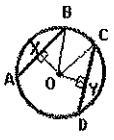
- Para obter a distância de um ponto O a uma reta r, traçamos uma reta perpendicular à reta dada passando pelo ponto O. O ponto T obtido pela interseção dessas duas retas é o ponto que determinará um extremo do segmento OT cuja medida representa a distância entre o ponto e a reta.



- Em uma mesma circunferência ou em circunferências congruentes, cordas congruentes possuem arcos congruentes e arcos congruentes possuem cordas congruentes. (Situação 1)

- Um diâmetro que é perpendicular a uma corda é bissetor da corda e também de seus dois arcos. (Situação 2)

- Em uma mesma circunferência ou em circunferências congruentes, cordas que possuem a mesma distância do centro são congruentes. (Situação 3)

Situação 1	Situação 2	Situação 3
		

EXERCÍCIOS

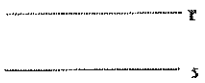
1 - Circunferências que possuem somente dois pontos distintos em comum:

a) circunferências concêntricas
b) circunferências tangentes
c) circunferências secantes
d) circunferências internas

RESPOSTAS
1 - C

RETAS PARALELAS

Duas retas distintas num mesmo plano α são paralelas quando não têm nenhum ponto em comum.



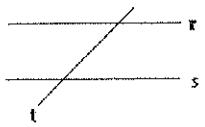
retas paralelas

Feixe de retas paralelas

Um feixe de retas paralelas são um conjunto de 3 ou mais retas paralelas.

feixe de retas paralelas

Transversal



duas retas paralelas cortadas por uma transversal

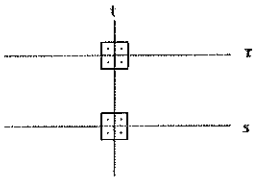
Transversal é o nome dado à reta que cruza as retas paralelas.

Obs: Pode haver mais de 1 transversal.

Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal

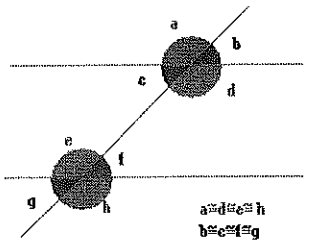
Transversal Perpendicular às retas

Quando a transversal for perpendicular às duas semi-retas paralelas todos os ângulos serão retos (de 90°)



Transversal não-perpendicular às retas

Quando a transversal não for perpendicular às retas paralelas, haverá quatro ângulos agudos iguais e quatro ângulos obtusos iguais.



Tipos de ângulos

Posição

Colaterais: Estão no mesmo lado da transversal.

Alternos: Estão em lados diferentes da transversal e podem ser interna ou externa.

Classificação Geral

Colaterais internos: Estão do mesmo lado da transversal, entre as paralelas, a soma dos ângulos é 180°

Colaterais externos: Estão do mesmo lado da transversal, fora das paralelas, a soma dos ângulos é 180°

Colaterais adjacentes: Estão do mesmo lado da transversal, mas não na mesma região, apresentam o mesmo vértice, a soma dos ângulos é 180°

Colaterais correspondentes: Estão do mesmo lado da transversal, mas não na mesma região e não apresentam o mesmo vértice, os ângulos são iguais

Alternos internos: Estão em lados diferentes da transversal, entre as paralelas e não apresentam o mesmo vértice, os ângulos são iguais

Alternos externos: Estão em lados diferentes da transversal, fora das paralelas e não apresentam o mesmo vértice, os ângulos são iguais

Alternos comuns: Estão em lados e regiões diferentes da transversal e não apresentam o mesmo vértice, a soma de seus ângulos é 180°

Alternos adjacentes: Estão em lados diferentes da transversal, mas na mesma região e apresentam o mesmo vértice, a soma dos ângulos é 180°

Opostos pelo vértice: Estão em lados e regiões diferentes da transversal e apresentam o mesmo vértice, os ângulos são iguais.

Complementares: são aqueles que, somados, resultam 90°
Ângulo reto: é o ângulo que medem exatamente 90°.

Ângulo central: é o angulo cujo vértice é o centro da circunferência.

Ângulo inscrito: é o ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência e seus lados são secantes a ela.

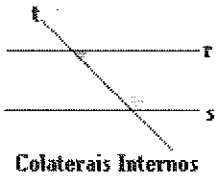
Ângulo Obtuso: é um ângulo cuja medida está entre 90 ° e 180 °.

Ângulo Agudo: é o ângulo cuja medida é maior do que 0 e menor que 90 graus.

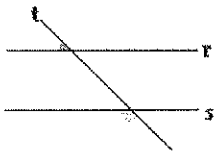
Ângulo de meia volta ou raso: é o ângulo que mede exatamente 180°.

Ângulo de uma volta: é aquele que mede 360°, ou seja, uma volta inteira.

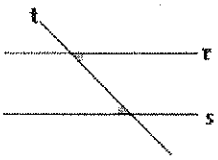
Correspondentes: são os que estão do mesmo lado.(congruentes)



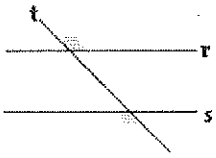
Colaterais Internos



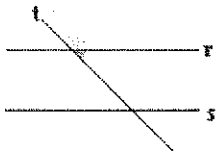
Colaterais Externos



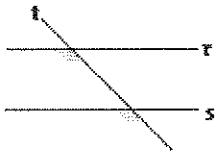
Alternos Internos



Alternos Externos

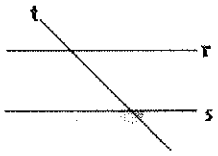


Colaterais Adjacentes

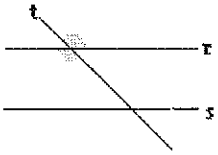


Colaterais Correspondentes

Alternos Comuns



Alternos Adjacentes



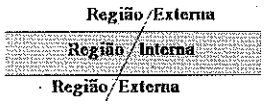
Opostos pelo vértice

Classificação geral

Regiões

Interna: Entre a reta

Externo: Fora da reta



EXERCÍCIOS

Assinale as alternativas incorretas:

a) **Colaterais internos:** Estão do mesmo lado da transversal, entre as paralelas, a soma dos ângulos é 90°

b)**Colaterais externos:** Estão do mesmo lado da transversal, fora das paralelas, a soma dos ângulos é 180°

c)**Colaterais adjacentes:** Estão do mesmo lado da transversal, mas não na mesma região, apresentam o mesmo vértice, a soma dos ângulos é 180°

d) **Colaterais correspondentes:** Estão do mesmo lado da transversal, mas não na mesma região e não apresentam o mesmo vértice, os ângulos são diferentes.

RESPOSTAS
A - D

NÚMEROS COMPLEXOS

Na resolução de uma equação algébrica, um fator fundamental é o conjunto universo que representa o contexto onde poderemos encontrar as soluções. Por exemplo, se estivermos trabalhando no conjunto dos números racionais, a equação 2x+7=0, terá uma única solução dada por x=-7/2. assim, o conjunto solução será:

$$S = \{ 7/2 \}$$

mas, se estivermos procurando por um número inteiro como resposta, o conjunto solução será o conjunto vazio, isto é:

$$S = \emptyset = \{ \}$$

De forma análoga, ao tentar obter o conjunto solução para a equação $x^2+1=0$ sobre o conjunto dos números reais, obteremos como resposta o conjunto vazio, isto é:

$$S = \emptyset = \{ \}$$

o que significa que não existe um número real que elevado ao quadrado seja igual a -1, mas se seguirmos o desenvolvimento da equação pelos métodos comuns, obteremos:

$$x = R[-1] = \sqrt{-1}$$

onde R[-1] é a raiz quadrada do número real -1. Isto parece não ter significado prático e foi por esta razão que este número foi chamado imaginário, mas o simples fato de substituir R[-1] pela letra i (unidade imaginária) e realizar operações como se estes números fossem polinômios, faz com que uma série de situações tanto na Matemática como na vida, tenham sentido prático de grande utilidade e isto nos leva à teoria dos números complexos.

Definição de número complexo

Número complexo é todo número que pode ser escrito na forma

$$z = a + b\,i$$

onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária. O número real a é a parte real do número complexo z e o número real b é a parte imaginária do número complexo z, denotadas por:

$$a = Re(z) \quad e \quad b = Im(z)$$

Exemplos de tais números são apresentados na tabela.

Número complexo	Parte real	Parte imaginária
2 + 3 i	2	3
2 - 3 i	2	-3
2	2	0
3 i	0	3
-3 i	0	-3
0	0	0

Observação: O conjunto de todos os números complexos é denotado pela letra C e o conjunto dos números reais pela letra R. Como todo número real x pode ser escrito como um número complexo da forma z=x+yi, onde y=0 então assumiremos que o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos.

Elementos complexos especiais

Igualdade de números complexos: Dados os números complexos z=a+bi e w=c+di, definimos a igualdade entre z e w, escrevendo

z = w se, e somente se, a = c e b = d

Para que os números complexos z=2+yi e w=c+3i sejam iguais, deveremos ter que c=2 e y=3.

Oposto de um número complexo: O oposto do número complexo z=a+bi é o número complexo denotado por -z=-(a+bi), isto é:

-z = Oposto(a+bi) = (-a) + (-b)i

O oposto de z=-2+3i é o número complexo -z=2-3i.

Conjugado de um número complexo: O número complexo conjugado de z=a+bi é o número complexo denotado por z*=a-bi, isto é:

z* = conjugado(a+bi) = a + (-b)i

O conjugado de z=2-3i é o número complexo z*=2+3i.

Operações básicas com números complexos

Dados os números complexos z=a+bi e w=c+di, podemos definir duas operações fundamentais, adição e produto, agindo sobre eles da seguinte forma:

z+w = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i

z.w = (a+bi).(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i

Observação: Tais operações lembram as operações com expressões polinomiais, pois a adição é realizada de uma forma semelhante, isto é: (a+bx)+(c+dx)=(a+c)+(b+d)x e a multiplicação (a+bx).(c+dx), é realizada através de um algoritmo que aparece na forma:

a + b x
c + d x X

---

ac + bcx
adx + bdx²

---

ac + (bc+ad)x + bdx²

de forma que devemos substituir x^2 por -1.

Exemplos:

Se z=2+3i e w=4-6i, então z+w=(2+3i)+(4-6i)=6-3i.

Se z=2+3i e w=4-6i, então z.w=(2+3i).(4-6i)=-4+0i.

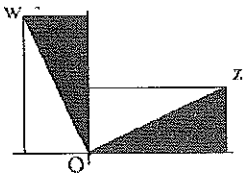
Potências e curiosidade sobre a unidade imaginária

Potências de i: Ao tomar i=R[-1], temos uma sequência de valores muito simples para as potências de i:

Potência	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8	i^9
Valor	-1	-i	1	i	-1	-i	1	i

Pela tabela acima podemos observar que as potência de i cujos expoentes são múltiplos de 4, fornecem o resultado 1, logo toda potência de i pode ter o expoente decomposto em um múltiplo de 4 mais um resto que poderá ser 0, 1, 2 ou 3. Dessa forma, podemos calcular rapidamente qualquer potência de i, apenas conhecendo o resto da divisão do expoente por 4.

Curiosidade geométrica sobre i: Ao pensar um número complexo z=a+bi como um vetor z=(a,b) no plano cartesiano, a multiplicação de um número complexo z=a+bi pela unidade imaginária i, resulta em um outro número complexo w=-b+ai, que forma um ângulo reto (90 graus) com o número complexo z=a+bi dado.



O inverso de um número complexo

Dado o número complexo z=a+bi, não nulo (a ou b deve ser diferente de zero) definimos o inverso de z como o número z^{-1}=u+iv, tal que

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

O produto de z pelo seu inverso z-1 deve ser igual a 1, isto é:

(a+bi).(u+iv) = (au-bv)+(av+bu)i = 1 = 1+0.i

o que nos leva a um sistema com duas equações e duas incógnitas:

a u - b v = 1
b u + a v = 0

Este sistema pode ser resolvido pela regra de Cramér e possui uma única solução (pois a ou b são diferentes de zero), fornecendo:

u = a/(a^2+b^2)
v = -b/(a^2+b^2)

assim, o inverso do número complexo z=a+bi é:

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Obtenção do inverso de um número complexo: Para obter o inverso de um número complexo, por exemplo, o inverso de z=5+12i, deve-se:

Escrever o inverso desejado na forma de uma fração

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{5+12i}$$

Multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo conjugado de z

$$z^{-1} = \frac{1}{5+12i} = \frac{1}{5+12i}\frac{5-12i}{5-12i}$$

Lembrar que $i^2 = -1$, simplificar os números complexos pela redução dos termos semelhantes, para obter

$$z^{-1} = \frac{5-12i}{169}$$

Diferença de números complexos: A diferença entre os números complexos z=a+bi e w=c+di é o número complexo obtido pela soma entre z e -w, isto é: z-w=z+(-w).

Exemplo: A diferença entre os complexos z=2+3i e w=5+12i é z-w=(2+3i)+(-5-12i)=(2-5)+(3-12)i=-3-9i.

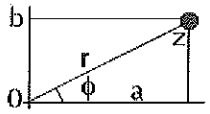
Divisão de números complexos: A divisão entre os números complexos z=a+bi e w=c+di (w não nulo) é definida como o número complexo obtido pelo produto entre z e w^{-1}, isto é: $z/w=z.w^{-1}$.

Exemplo: Para dividir o número complexo z=2+3i por w=5+12i, basta multiplicar o numerador e o denominador da fração z/w pelo conjugado de w:

$$\frac{z}{w} = \frac{2+3i}{5+12i} = (2+3i)\frac{5-12i}{169} = \frac{46-9i}{169}$$

Representação geométrica de um número complexo

Um número complexo da forma z=a+bi, pode ser representado do ponto de vista geométrico no plano cartesiano, como um ponto (par ordenado) tomando-se a abscissa deste ponto como a parte real do número complexo a no eixo OX e a ordenada como a parte imaginária do número complexo z no eixo OY, sendo que o número complexo 0=0+0i é representado pela própria origem (0,0) do sistema.



Módulo e argumento de um número complexo

Módulo de um número complexo: No gráfico anterior, observamos que existe um triângulo retângulo cuja medida da hipotenusa é a distância da origem 0 ao número complexo z, normalmente denotada pela letra grega *ro* nos livros, mas aqui denotada por *r*, o cateto horizontal tem comprimento igual à parte real a do número complexo e o cateto vertical corresponde à parte imaginária b do número complexo z.

Desse modo, se z=a+bi é um número complexo, então $r^2=a^2+b^2$ e a medida da hipotenusa será por definição, o módulo do número complexo z, denotado por |z|, isto é:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Argumento de um número complexo: O ângulo ø formado entre o segmento OZ e o eixo OX, é denominado o argumento do número complexo z. Pelas definições da trigonometria circular temos as três relações:

cos(ø)=a/r, sen(ø)/r, tan(ø)=b/a

Por experiência, observamos que é melhor usar o cosseno ou o seno do ângulo para definir bem o argumento, uma vez que a tangente apresenta alguns problemas.

Forma polar e sua multiplicação

Forma polar de um número complexo: Das duas primeiras relações trigonométricas apresentadas anteriormente, podemos escrever:

z = a+bi = r cos(ø) + r i sen(ø) = r (cos ø + i sen ø)

e esta última é a forma polar do número complexo z.

Multiplicação de complexos na forma polar: Consideremos os números complexos:

z = r (cos m + i sen m)
w = s (cos n + i sen n)

onde, respectivamente, r e s são os módulos e m e n são os argumentos destes números complexos z e w.

Realizamos o produto entre estes números da forma usual e reescrevemos o produto na forma:

z . w = r s [cos (m+n) + i sen (m+n)]

Este fato é garantido pelas relações:

cos(m+n) = cos(m) cos(n) - sen(m) sen(n)
sen(m+n) = sen(m) cos(n) + sen(n) cos(m)

Potência de um número complexo na forma polar

Seguindo o produto acima, poderemos obter a potência de ordem k de um número complexo. Como

z = r [cos(m) + i sen(m)]

então

$z^k = r^k$ [cos(km) + i sen(km)]

Exemplo: Consideremos o número complexo z=1+i, cujo módulo é a raiz quadrada de 2 e o argumento é $\pi/4$ (45 graus). Para elevar este número à potência 16, basta escrever:

$z^{16} = 2^8[\cos(720^o)+i\text{sen}(720^o)]=256$

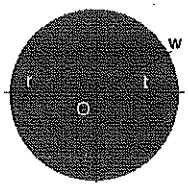
Raiz quarta de um número complexo

Um ponto fundamental que valoriza a existência dos números complexos é a possibilidade de extrair a raiz de ordem 4 de um número complexo, mesmo que ele seja um número real negativo, o que significa, resolver uma equação algébrica do 4º grau. Por exemplo, para extrair a raiz quarta do número -16, devemos obter as quatro raízes da equação algébrica $x^4+16=0$.

Antes de apresentar o nosso processo para a obtenção da raiz quarta de um número complexo w, necessitamos saber o seu módulo r e o seu argumento t, o que significa poder escrever o número complexo na forma polar:

w = r (cos t + i sen t)

O primeiro passo é realizar um desenho mostrando este número complexo w em um círculo de raio r e observar o argumento t, dado pelo angulo entre o eixo OX e o número complexo w.



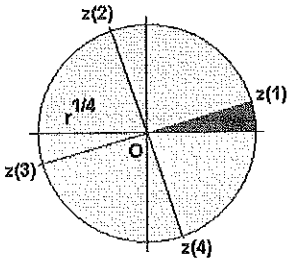
O passo seguinte é obter um outro número complexo z(1) cujo módulo seja a raiz quarta de r e cujo argumento seja t/4. Este número complexo é a primeira das quatro raízes complexas procuradas.

$$z(1) = r^{1/4}[\cos(t/4)+i\,\mathrm{sen}(t/4)]$$

As outras raízes serão:

$$z(2) = i\,z(1)$$
$$z(3) = i\,z(2)$$
$$z(4) = i\,z(3)$$

Todas aparecem no gráfico, mas observamos que este processo para obter as quatro raízes do número complexo w ficou mais fácil pois temos a propriedade geométrica que o número complexo i multiplicado por outro número complexo, roda este último de 90 graus e outro fato interessante é que todas as quatro raízes de w estão localizadas sobre a mesma circunferência e os ângulos formados entre duas raízes consecutivas é de 90 graus.



Se os quatro números complexos forem ligados, aparecerá um quadrado rodado de t/4 radianos em relação ao eixo OX.

Raiz n-ésima de um número complexo

Existe uma importantíssima relação atribuída a Euler:

$$e^{i.t} = \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)$$

que é verdadeira para todo argumento real e a constante e tem o valor aproximado 2,71828... Para facilitar a escrita usamos frequentemente:

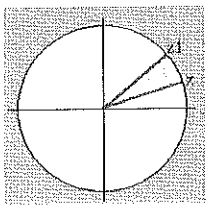
$$\exp(i\,t) = \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)$$

Observação: A partir da relação de Euler, é possível construir uma relação notável envolvendo os mais importantes sinais e constantes da Matemática:

$$e^{i\cdot\pi} + 1 = 0$$

Se multiplicarmos o número e^{it} por um número complexo z, o resultado será um outro número complexo rodado de t radianos em relação ao número complexo z.

Por exemplo, se multiplicarmos o número complexo z por $\exp(i\pi/8)=\cos(\pi/8)+i\,\mathrm{sen}(\pi/8)$, obteremos um número complexo z(1) que forma com z um ângulo $\pi/8=22{,}5$ graus, no sentido anti-horário.



Iremos agora resolver a equação $x^n=w$, onde n é um número natural e w é um número complexo dado. Da mesma forma que antes, podemos escrever o número complexo w=r(cos t + i sen t) e usar a relação de Euler, para obter:

$$w = r\,e^{it}$$

Para extrair a raiz n-ésima, deve-se construir a primeira raiz que é dada pelo número complexo

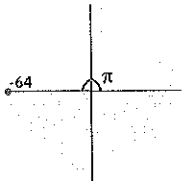
$$z(1) = r^{1/n}\,e^{it/n}$$

Todas as outras n-1 raízes serão obtidas pela multiplicação recursiva dada por:

$$z(k) = z(k-1)\,e2i^{\pi}/n$$

onde k varia de 2 até n.

Exemplo: Para obter a primeira raiz da equação $x^8=-64$, observamos a posição do número complexo w=-64+0i, constatando que o seu módulo é igual a 64 e o argumento é igual a radianos π (=180 graus).



Aqui, a raiz oitava de 64 é igual a 2 e o argumento da primeira raiz é $\pi/8$, então z(1) pode ser escrita na forma polar:

$$z(1) = 2\,ei\pi/8 = 2(\cos 22{,}5^\circ + i\,\mathrm{sen}\,22{,}5^\circ) = R[2](1+i)$$

onde R[2] é a raiz quadrada de 2. Obtemos as outras raízes pela multiplicação do número complexo abaixo, através de qualquer uma das formas:

$$e2i\pi/8 = 2(\cos 45^\circ + i\,\mathrm{sen}\,45^\circ) = R[2](1+i)/2 = 0{,}707(1+i)$$

Assim:

$$z(2) = z(1)\,R[2](1+i)/2$$
$$z(3) = z(2)\,R[2](1+i)/2$$
$$z(4) = z(3)\,R[2](1+i)/2$$
$$z(5) = z(4)\,R[2](1+i)/2$$
$$z(6) = z(5)\,R[2](1+i)/2$$
$$z(7) = z(6)\,R[2](1+i)/2$$
$$z(8) = z(7)\,R[2](1+i)/2$$

EXERCÍCIOS

1 – Qual é o valor de **m**, real, para que o produto (2 + mi. (3 + i) seja um imaginário puro?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 10

2 – O produto (x + yi) . (2 + 3i) é um número real, quando x e y são reais e:

a) x – 3y = 0
b) 2y – 3x = 0
c) 2x + 2y = 0
d) 2x + 3y = 0
e) 3x + 2y = 0

RESPOSTAS	
1 - B	2 - E

EQUAÇÃO POLINOMINAL

Equação polinomial ou algébrica é toda equação da forma $p(x)=0$, em que $p(x)$ é um polinômio:

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ de grau n, com $n \geq 1$.

Veja alguns exemplos:

$x^4 + 9x^2 - 10x + 3 = 0$
$10x^6 - 2x^5 + 6x^4 + 12x^3 - x^2 + x + 7 = 0$
$x^8 - x^6 - 6x + 2 = 0$
$x^{10} - 6x^2 + 9 = 0$

As raízes de uma equação polinomial constituem o conjunto solução da equação.

Para as equações em que o grau é 1 ou 2, o método de resolução é simples e prático.

Nos casos em que o grau dos polinômios é 3 ou 4, existem expressões para a obtenção da solução.

Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)

Toda equação polinomial $p(x) = 0$, de grau n onde $n \geq 1$, admite pelo menos uma raiz complexa.

Exemplo 1

Determine o valor do coeficiente K, sabendo que 2 é a raiz da equação:

$2x^4 + kx^3 - 5x^2 + x - 15 = 0$

Se 2 é raiz da equação, então temos:

$2(2)^4 + k(2)^3 - 5(2)^2 + 2 - 15 = 0$
$2*16 + k*8 - 5*4 + 2 - 15 = 0$
$32 + 8k - 20 + 2 - 15 = 0$
$8k + 34 - 35 = 0$
$8k - 1 = 0$
$8k = 1$
$k = 1/8$

Temos que o valor do coeficiente k é 1/8.

Exemplo 2

Determine o valor de m, sabendo que –3 é raiz da equação: $mx^3 + (m + 2)x^2 - 3x - m - 8 = 0$.

Temos que:

$m(-3)^3 + (m + 2)(-3)^2 - 3(-3) - m - 8 = 0$
$m(-27) + (m + 2)(9) + 9 - m - 8 = 0$
$-27m + 9m + 18 + 9 - m - 8 = 0$
$-27m + 9m - m = 8 - 18 - 9$
$-19m = -19$
$m = 1$

O valor de m é 1.

EXERCÍCIOS

Em cada caso, escreva uma equação algébrica de grau mínimo cujas raízes são:

a) – 3i e 3i
b) -2, 2 + i, 2 – 1
c) -5, 4, 1
d) 1, 2, 3, 4

RESPOSTAS
a) $x^2 + 9 = 0$, por exemplo
b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 - 0$, por exemplo
c) $x^3 - 21x + 20 = 0$, por exemplo
d) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$, por exemplo

LIVROS PESQUISADOS

- Nery, Chico
  Matemática para o Ensino Médio: volume único / Chico Nery, Fernando Trotta – 1ª ed. – São Paulo: Saraiva.
- Iezzi, Gelson
  Matemática: volume único / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo – São Paulo: Atual.
- Parente, Eduardo
  Matemática – Comercial & Financeira / Eduardo Parente, Roberto Caribé – São Paulo: FTD.
- Mori, Iracema
  Matemática – ideias e desafios / Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga – São Paulo: Saraiva

SITES PESQUISADOS

http://www.brasilescola.com/matematica/numeros-inteiros.htm
http://www.paulomarques.com.br/arq11-10.htm
http://www.somatematica.com.br/fundam/primos.php
http://www.matematicadidatica.com.br/EquacaoSegundoGrau.aspx
http://www.brasilescola.com/matematica/conjuntos-numericos.htm
http://www.exatas.mat.br/conjuntos.htm
http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/funcao-1-grau.htm
http://www.brasilescola.com/matematica/funcao-segundo-grau.htm
http://www.algosobre.com.br/matematica-financeira/nocoes-de-matematica-financeira.html
http://www.brasilescola.com/matematica/propriedades-proporcao.htm
http://www.brasilescola.com/matematica/porcentagem.htm
http://www.brasilescola.com/matematica/juros-simples.htm
http://www.brasilescola.com/matematica/juros-compostos.htm
http://www.colegioweb.com.br/matematica/trigonometria-no-triangulo-retangulo
http://www.brasilescola.com/matematica/teorema-pitagoras.htm
http://www.algosobre.com.br/matematica/analise-combinatoria.html
http://www.somatematica.com.br/emedio/probabilidade2.php
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/geom-elem/geometr.htm
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/geom-circ/geom-circ.htm
http://pt.wikipedia.org/wiki/Retas_paralelas
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/ncomplex/ncomplex.htm#nc01
http://www.brasilescola.com/matematica/equacao-polinomial.htm

Relembrando:

NÚMEROS INTEIROS
- inteiros não-nulos (n^{os} inteiros menos o 0)
- não-positivos (n^{os} negativos incluindo o 0)
- não-negativos (n^{os} positivos incluindo o 0).

Operações em Z:

- Adição
  - sinais iguais (conservam-se os sinais)
  - sinais opostos (conversa-se o sinal do maior)
- Subtração (oposição inversa da adição
- Multiplicação (caso particular da soma)
- Potenciação (os fatores são iguais)
- Divisão (o conjunto Z não é fechado, o quociente é inteiro)
- Números primos: (números naturais que têm apenas dois divisores, 1 e ele mesmo)

EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Sentença reduzida à forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Equação do 2º grau completa: os coeficientes a, b e c são diferentes de 0.
Equação do 2º grau incompleta: o coeficiente de a é diferente de 0.
Conjuntos numéricos: agrupamento de elementos que possuem características semelhantes.

Números naturais (N) — Números inteiros (Z)
Números racionais (Q) — Números Irracionais (I)
Números Reais (R)

FUNÇÃO DO 1º GRAU: $y = ax + b$

Função crescente: valores de x e y aumentam proporcionalmente.
Função decrescente: se os valores de x aumentam, os valores de y diminuem.

FUNÇÃO DO 2º GRAU: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Sinais
- $\Delta = 0$, uma raiz real.
- $\Delta > 0$, duas raízes reais e distintas
- $\Delta < 0$, nenhuma raiz real.

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Razão: o quociente é resultado da divisão entre grandezas.

Propriedade fundamental da proporção: o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.
Propriedade da soma dos termos em uma proporção: se somar os dois termos da primeira razão e dividir pelo primeiro ou pelo segundo termo, irá obter uma razão igual à soma dos dois termos da segunda razão dividida pelo terceiro ou quarto termo.

PORCENTAGEM

Razão centesimal: razão que tem por conseguinte o nº 100.

JUROS SIMPLES

$J = C * i * t$
- J = juros
- C = capital
- i = taxa de juros
- t = tempo de aplicação (mês, ano...)

$M = C + J$
- M = montante final
- C = capital
- J = juros

JUROS COMPOSTOS

$M = C * (1 + i)^t$
- M: montante
- C: capital
- i: taxa de juros
- t: tempo de aplicação

TRIGOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Triângulo retângulo: um de seus ângulos internos é reto, ou seja, mede 90°
Teorema de Pitágoras: "A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa."

ANÁLISE COMBINATÓRIA: métodos de contagem

- **Fatorial:** aceita apenas um acontecimento, fatorial de n (n!)
- **Princípio fundamental de contagem:** o acontecimento ocorre apenas em n etapas diferentes.
- **Permutação simples:** agrupamentos formados com todos os n elementos.
- **Arranjo simples:** taxa K, elementos distintos, podendo variar a ordem em que aparecem.
- **Combinação simples:** preocupação com a existência do elemento e não com a ordem.

PROBABILIDADE: cálculo da chance de ocorrência de um número em experimento aleatório.

- **Espaço amostral:** simbolizado por S, é o conjunto que contém todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

GEOMETRIA PLANA

Polígonos: convexos, não convexos, congruentes

- Paralelogramos
- Retângulo
- Trapézio
- Pipa ou papagaio
- Losango
- Quadrado
- Trapézio isósceles

POLÍGONOS E TRIÂNGULOS

Polígono (muitos ângulos)

Triângulo (polígono de 3 lados)

- **Triângulo eqüilátero** (3 lados, medidas iguais)
- **Triângulo isósceles** (2 lados, medidas iguais)
- **Triângulo escaleno** (3 lados, medidas diferentes)

CÍRCULO, CIRCUNFERÊNCIA E ARCOS

Círculo: conjunto de pontos internos de uma circunferência.

Circunferência: é o lugar geométrico de todos os pontos que estão a uma certa distância, chamada raio, de um certo ponto, chamado centro.

Raio: segmento de uma reta com uma extremidade no centro da circunferência e a outra extremidade num ponto qualquer da circunferência.

Arco menor: reúne dois pontos da circunferência que não são extremos de um diâmetro e todos os pontos da circunferência que estão dentro do ângulo central cujos lados contém os dois pontos.

Arco maior: liga dois pontos da circunferência que não são extremos de um diâmetro e todos os pontos da circunferência que estão fora do ângulo central cujos lados contém os dois pontos.

RETAS PARALELAS: São retas que não têm nenhum ponto em comum.

NÚMEROS COMPLEXOS: Elementos do conjunto C, uma extensão de conjunto dos números reais R, onde existe um elemento que representa a raiz quadrada de nº -1, chamada unidade imaginária.

EQUAÇÃO POLINOMINAL: Equação da forma p(x) = 0, em que p(x) é um polinômio.